Klassische Theoretische Physik II

Institut für Theoretische Physik

Vorlesung: Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld; Übung: Dr. Maximilian Löschner

Übungsblatt 6 SoSe 2020

Abgabe: Freitag, 5. 6. 2020 bis 12:00

Die Abgabe der Blätter erfolgt durch Upload in Ihrem ILIAS-Tutorium *Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik II*.

Aufgabe 1. 8 P.

Wir betrachten das sog. *Zweikörperproblem*, also die Frage nach der Bewegung zweier Körper die ohne sonstige äußere Einflüsse nur miteinander wechselwirken. Für die Bewegung eines Planeten mit Masse m bei $\vec{r}_P$ um einen Stern bei $\vec{r}_S$ (dessen Bewegung wir hier vernachlässigen) lautet die zugehörige Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{k}{r},$$

wobei $r = |\vec{r}_P - \vec{r}_S|$ den Abstand der beiden Körper bezeichnet. In allen Problemen der Mechanik mit einem Potential der Form $U \propto 1/r$ tritt der sog. Laplace-Runge-Lenz-Vektor als Erhaltungsgröße auf. Dieser ist

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{J} - mk\frac{\vec{r}}{r},$$

mit dem Relativvektor $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_S$ und dem Drehimpulsvektor $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$.

(a) Verwenden Sie den Lagrange-Formalismus 2. Art und zeigen Sie, dass $\vec{A}$ eine Erhaltungsgröße ist. (2 P.)

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{A}$ in der Ebene liegt, die von $\vec{r}$ und $\vec{p}$ aufgespannt wird. (2 P.)

Hinweis: Verwenden Sie die Zyklizität des Spatproduktes $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

(c) Bilden Sie das Skalarprodukt $\vec{A} \cdot \vec{r} = A\,r\cos\phi$, wobei ϕ der Winkel zwischen $\vec{A}$ und $\vec{r}$ ist, und zeigen Sie, dass daraus folgt

$$A\,r\cos\phi = J^2 - mkr.$$

Wie muss ϕ gewählt werden, damit r minimal ist? Der zugehörige Punkt $\vec{r}_{\text{min}}$ heißt Perizentrum. In welche Richtung zeigt $\vec{A}$ also? Wie steht das im Zusammenhang mit der Periheldrehung des Merkur? (2 P.)

(d) Skizzieren Sie die Bahnkurve $r(\phi)$ für $A < mk$ und $A > mk$. (2 P.)

Aufgabe 2. 6 P.

Betrachten Sie die Galilei-Transformationen des Ortes $\vec{r}$ und der Zeit t mit der (eigentlichen) Drehmatrix R, zwei Vektoren $\vec{c}$, $\vec{V}$ und einem Skalar a, die alle zeitlich konstant sein sollen:

$$\vec{r}' = R\vec{r} + \vec{c} + \vec{V}t, \qquad t' = t + a.$$

(a) Welche ist die definierende Eigenschaft für eine Drehmatrix und aus welcher Forderung folgt diese (auch anschaulich)? Wie viele Bedingungen folgen aus dieser Eigenschaft für die Matrixelemente R_{ij} und wie viele freie Parameter bleiben also für die Rotation übrig? (2 P.)

(b) Zeigen Sie, dass die Galilei-Transformationen bezüglich Hintereinanderausführen eine nicht-abelsche Gruppe bilden, d.h. dass hier das Assoziativgesetz gilt, ein neutrales Element e und zu jedem Gruppenelement g ein Inverses g^{-1} existiert. Welcher Teil der Transformationen bewirkt, dass die Gruppe nicht-abelsch ist? (2 P.)

Hinweis: Bestimmen Sie dazu zunächst das Verknüpfungsgesetz. Stellen Sie also die Ausführung einer Transformation g_1 und danach g_2 als zusammengesetzte Transformation dar als

$$g_3 = g_2 \circ g_1 = (R_3, \vec{c}_3, \vec{V}_3, a_3).$$

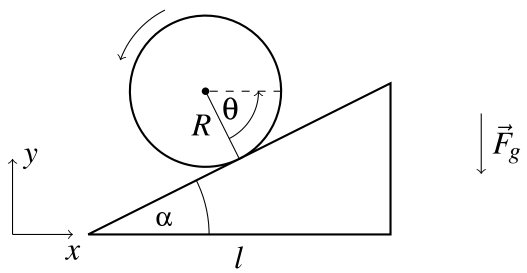
(c) Zeigen Sie, dass sich ein freies Teilchen, dass sich im Bezugssystem S geradlinig gleichförmig bewegt, auch im System S' einer solche Bewegung folgt wenn die beiden Systeme durch einen Galilei-Transformation ineinander überführt werden. Sie müssen also zeigen, dass sich der Übergang als

$$\vec{r} = \vec{v}t + \vec{b} \quad \to \quad \vec{r}' = \vec{v}'t' + \vec{b}',$$

mit konstantem $\vec{v}'$ und $\vec{b}'$ darstellen lässt. (2 P.)

Aufgabe 3. 6 P.

Betrachten Sie mithilfe des Lagrange-Formalismus 1. Art einen Reifen mit Radius R und Masse m, der auf einem Holzkeil mit Masse M, Öffnungswinkel α und Länge l abrollt. Der Holzkeil soll dabei reibungslos in der Horizontalen rutschen, der Reifen jedoch nur ohne Gleiten auf dem Keil abrollen können. Es wirke wieder die Schwerkraft in die vertikale Richtung.



(a) Bestimmen Sie die Zwangsbedingungen und die Lagrange-Funktion des Systems. (3 P.)

Hinweis: Als verallgemeinerte Koordinaten bieten sich die x-Koordinate des Keils, der Abrollwinkel $\theta(t)$ und die Rollstrecke des Reifens auf dem Keil an. Sie sollten eine nicht-holonome Zwangsbedingung zwischen θ und dieser Rollstrecke finden. Denken Sie auch an die Rotationsenergie des Reifens.

(b) Bestimmen Sie mithilfe der Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten und der nicht-holonomen Zwangsbedingung die Reibungskraft, die den Reifen vom Rutschen auf dem Keil abhält. (3 P.)