

A1) $L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{k}{r}$

a) Zunächst Zeitableitung von $\vec{A}$ bestimmen:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\vec{p} \times \vec{j} - m k \frac{\vec{r}}{r} \right) = \dot{\vec{p}} \times \vec{j} + \vec{p} \times \dot{\vec{j}} - m k \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \vec{r} \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{denn } \frac{d\vec{r}/r}{dt} &= \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r} \frac{d(1/r)}{dt} = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \right) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} \left(\sum_i x_i^2 \right)^{1/2} \right] \\ &= \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \vec{r} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{1}{2} \left(\sum_i x_i^2 \right)^{-1/2} 2 \sum_i x_i \dot{x}_i \right] = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \vec{r} \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung für $\vec{r}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \ddot{x}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = -k \frac{x_i}{r^3}$$

$$\rightarrow m \ddot{\vec{r}} = -k \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2)$$

$$\text{Daher } \dot{\vec{j}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times (m \dot{\vec{r}})}_{=0} + \vec{r} \times (m \ddot{\vec{r}}) = -k \vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \underline{\underline{\vec{0}}}$$

$$\text{außerdem: } \vec{p} \times \dot{\vec{j}} = m \vec{r} \times (\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}) = \vec{r} (m \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{p}) - \vec{p} (m \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r})$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(2)}{=} \vec{r} \left(-k \frac{\vec{r} \cdot (m \dot{\vec{r}})}{r^3} \right) - m \dot{\vec{r}} \left(-k \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \\ &= m k \left(-\vec{r} \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\text{in (1)} \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \underline{\underline{\vec{0}}}$$

A1F

76128 KARLSRUHE,

Postfach 6380

Tel. 07 21 / 6 08 20 81

07 21 / 6 08 35 53

b) $\vec{r}, \vec{p}$ -Ebene definiert durch $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{j} \leftarrow$ Normalenvektor

zeige also $\vec{A} \cdot \vec{j} = 0$ (unter Verwendung der Zyklichkeit des Skalarproduktes)

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{j} &= (\vec{p} \times \vec{j}) \cdot \vec{j} - \frac{mk}{r} \vec{r} \cdot \vec{j} = \underbrace{(\vec{j} \times \vec{j}) \cdot \vec{p}}_{=0} - \frac{mk}{r} (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{r} \\ &= - \frac{mk}{r} \underbrace{(\vec{r} \times \vec{r}) \cdot \vec{p}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

$$c) \vec{A} \cdot \vec{r} = (\vec{p} \times \vec{j}) \cdot \vec{r} - \frac{mk}{r} r^2 = \underbrace{(\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{j}}_{=j^2} - mk r = j^2 - mk r = A \cos \phi$$

$$\Rightarrow r(\phi) = \frac{j^2}{mk + A \cos \phi}$$

$$r(\phi) \text{ minimal für } \phi = 0 \Rightarrow r_{\min} = \frac{j^2}{mk + A}$$

ϕ ist der Winkel zwischen $\vec{A}$ und $\vec{r}$, also zeigt $\vec{A}$ in Richtung von $\vec{r}_{\min}$, also in Richtung des Perihels.

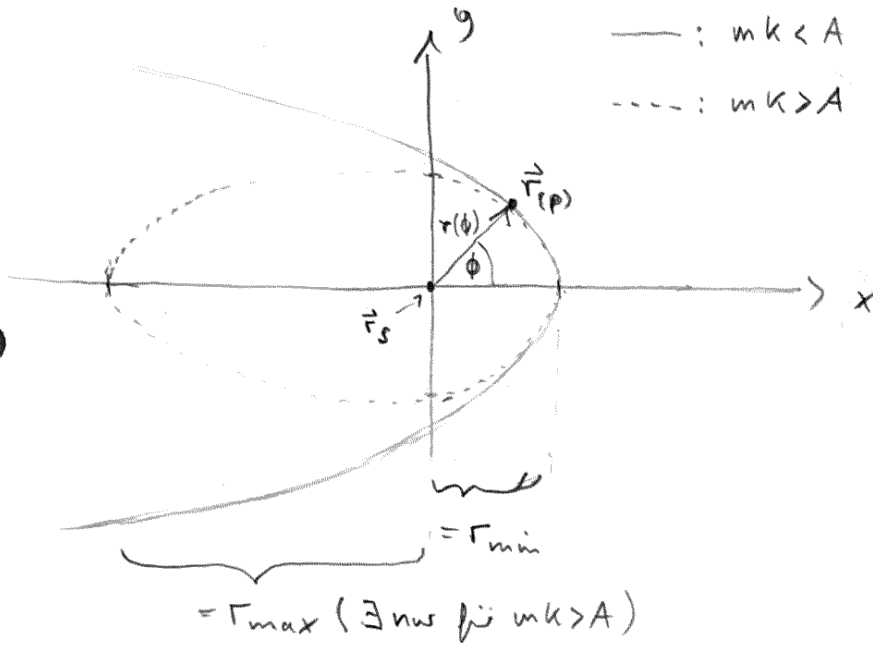
Zusammenhang mit Perihelabweichung des Merkur:

Wir hatten gezeigt, dass $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{0}$, also ist auch die Richtung des Perihels nicht von der Zeit abhängig. Das Perihel des Merkur wandert jedoch. Grund: gravitativer Einfluss eines Planeten ("Vulkan") zwischen Merkur und Sonne? Nein: Erklärung erst über allgemeine Relativitätstheorie. Kann als Abweichung des Gravitationspotentials vom $\frac{1}{r}$ -Gesetz gesehen werden $\Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} \neq \vec{0}$.

A1F]

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

d)



A21

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

Galilei-Transformation:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = R\vec{r} + \vec{c} + \vec{V}t, \quad t \rightarrow t' = t + a$$

a) definierende Eigenschaft R : $R^T R = \mathbb{1}$ ($= R R^T$), also R : orthogonale Matrix

Forderung aus Erhaltung des Skalarproduktes:

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u}^T \vec{w} \stackrel{!}{=} (\vec{u}')^T \vec{w}' = \vec{u}^T R^T R \vec{w}$$

Damit also auch Längenerhaltung $w^2 = \vec{w}^T \vec{w} = (\vec{w}')^T \vec{w}' = (w')^2$

in Komponenten: $(R^T R)_{ij} = (R^T)_{ik} R_{kj} = R_{ki} R_{kj} \stackrel{!}{=} (\mathbb{1})_{ij} = \delta_{ij}$

also $R_{ki} R_{kj} = \delta_{ij}$ $\Rightarrow$ liefert 6 unabhängige Bedingungen, (Summenkonvention!)

denn Gleichung ist symmetrisch unter $i \leftrightarrow j$: $R_{kj} R_{ki} = \delta_{ji} \Leftrightarrow R_{ki} R_{kj} = \delta_{ij}$

Es bleiben also $3 \times 3 - 6 = 3$ unabh. Parameter δ_{ij}

($\rightarrow$ z. B. Eulerwinkel)

AZF

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

b) Hintereinanderausführung $g_2 \circ g_1(\vec{r}, t)$:

$$g_1(\vec{r}) = R_1 \vec{r} + \vec{c}_1 + \vec{v}_1 t, \quad g_1(t) = t + a_1$$

$$\begin{aligned} g_2 \circ g_1(\vec{r}) &= g_2(\vec{r}_1) = R_2(R_1 \vec{r} + \vec{c}_1 + \vec{v}_1 t) + \vec{c}_2 + \vec{v}_2(t + a_1) \\ &= R_2 R_1 \vec{r} + R_2 \vec{c}_1 + a_1 \vec{v}_2 + \vec{c}_2 + (\vec{v}_2 + R_2 \vec{v}_1)t \end{aligned}$$

$$g_2 \circ g_1(t) = g_2(t_1) = t + a_2 + a_1$$

→ entspricht also Anwendung von

$$g_3 = (R_3, \vec{c}_3, \vec{v}_3, a_3) = (R_2 R_1, R_2 \vec{c}_1 + a_1 \vec{v}_2 + \vec{c}_2, \vec{v}_2 + R_2 \vec{v}_1, a_1 + a_2)$$

Matrixmultiplikation ist nicht-abelsch im Allgemeinen, auch nicht für Rotationen: $R_2 R_1 \neq R_1 R_2$

$$\Rightarrow g_2 \circ g_1(\vec{r}) \neq g_1 \circ g_2(\vec{r}).$$

Neutrales Element: $e = (\mathbb{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0)$

Inverses Element: $g^{-1} \circ g(\vec{r}) = \vec{r}$

→ Betrachte $g_2 \circ g_1$ mit $g_2 = g_1^{-1}$: $g_2 \circ g_1(\vec{r}) = (\mathbb{1}, \vec{0}, \vec{0}, 0)$

$$\Rightarrow g_1^{-1} = (R_1^{-1}, -R_1^{-1} \vec{c}_1 + a_1 R_1^{-1} \vec{v}_1, -R_1^{-1} \vec{v}_1, -a_1)$$

Da R Drehmatrix ist, ist sie auch orthogonal, also $R^{-1} = R^T$

$$\Rightarrow g^{-1} = (R^T, R^T(a\vec{v} - \vec{c}), -R^T \vec{v}, -a)$$

Assoziativität gilt, da alle Teile in der Verknüpfung / Hintereinanderausf. assoziativ sind, inklusive der Matrixmultiplikation.

A2 F

76128 KARLSRUHE,

Postfach 6380

Tel. 07 21 / 6 08 20 81

07 21 / 6 08 35 53

c) geradlinig, gleichförmige Bewegung in S:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}t + \vec{b}$$

Galilei-Transformation darauf:

$$g(\vec{r}(t)) = R\vec{r}(t) + \vec{c} + \vec{V}t = R(\vec{v}t + \vec{b}) + \vec{c} + \vec{V}t, \quad g(t) = t + a = t'$$

$$= (R\vec{v} + \vec{V})t + R\vec{b} + \vec{c}$$

$$\Rightarrow t = t' - a$$

$$= (R\vec{v} + \vec{V})(t' - a) + R\vec{b} + \vec{c}$$

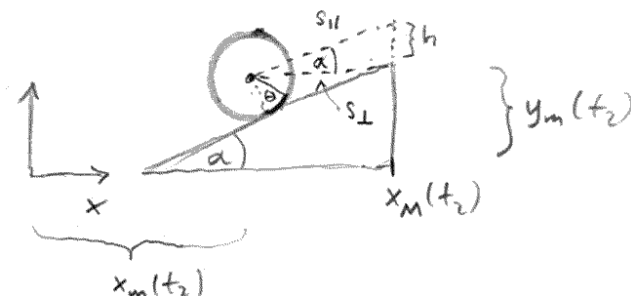
$$= (R\vec{v} + \vec{V})t' - a(R\vec{v} + \vec{V}) + R\vec{b} + \vec{c}$$

$$\stackrel{!}{=} \vec{r}'(t') = \vec{v}'t' + \vec{b}'$$

Vergleich zeigt: $\vec{v}' = R\vec{v} + \vec{V}, \quad \vec{b}' = R\vec{b} + \vec{c} - a(R\vec{v} + \vec{V})$

Mit dieser Wahl von $\vec{v}'$ und $\vec{b}'$ ist also gezeigt, dass auch im System S' eine gleichförmig geradlinige Bewegung stattfindet.

a) Betrachte das System der Anschaulichkeit halber zu zwei Zeitpunkten:

 $t_2:$ 

Als verallgemeinerte Koordinaten bieten sich s_{II} und θ an:

$$S_{\perp}(t) = S_{||}(t) \cdot \cos \alpha$$

$$2\pi R \cdot \frac{\theta}{2\pi} = s_{II} \Rightarrow R\dot{\theta} - \dot{s}_{II} = 0 \quad \text{vgl. mit} \quad \sum_{m=1}^3 a_{im} \dot{q}_m + b_i t = 0$$

$$\text{oder } R d\theta - ds_{II} = 0 \Rightarrow a_{1\theta} = R, \quad a_{1s_{II}} = -1, \quad b_{1t} = 0$$

Reifen: $T_m = T_{rot} + T_{\dot{x}_m} = \frac{m}{2} (R\dot{\theta})^2 + \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}_m^2 = \frac{m}{2} (R\dot{\theta})^2 + \frac{m}{2} \begin{pmatrix} \dot{x}_m - \dot{s}_\perp \\ -\dot{h} \end{pmatrix}^2$

$$= \frac{m}{2} (R\dot{\theta})^2 + \frac{m}{2} [\dot{x}_m^2 - 2\dot{x}_m \dot{s}_\perp + \dot{s}_\perp^2 + \dot{h}^2]$$

$$= \frac{m}{2} (R\dot{\theta})^2 + \frac{m}{2} [\dot{x}_m^2 - 2\dot{x}_m \dot{s}_{11} \cos \alpha + \dot{s}_{11}^2]$$

Keil $T_M = \frac{M}{2} x_M^2$

Potential: $U = m \cdot g y_m = mg(H + R - h) = mg(l_{II} - s_{II}) \sin \alpha + U_0$
 $\uparrow$
invariant

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)

Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

A3F1

76128 KARLSRUHE,

Postfach 6380

Tel. 07 21 / 6 08 20 81

07 21 / 6 08 35 53

$$\Rightarrow L = T_m + T_M - U$$

$$= \frac{m}{2} (R\dot{\theta})^2 + \frac{m}{2} [\dot{x}_M^2 - 2\dot{x}_M \dot{s}_{II} \cos \alpha + \dot{s}_{II}^2] + \frac{M}{2} \dot{x}_M^2 + mg \sin \alpha (s_{II} - l_{II})$$

b) Drei Bewegungsgleichungen aus $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_m} = \lambda_1 a_{1m}$, mit $q_1 = \theta$, $q_2 = s_{II}$
 $q_3 = x_M$ ($a_{13} = 0$)

$$\theta: \frac{d}{dt} [m R^2 \dot{\theta}] = \lambda_1 a_{1\theta} \Rightarrow m R^2 \ddot{\theta} = R \lambda_1 \quad (1)$$

$$s_{II}: \frac{d}{dt} [-m \dot{x}_M \cos \alpha + m \dot{s}_{II}] - mg \sin \alpha = \lambda_1 a_{1s_{II}}$$

$$\Rightarrow m \ddot{s}_{II} - m \ddot{x}_M \cos \alpha - mg \sin \alpha = -\lambda_1 \quad (2)$$

$$x_M: \frac{d}{dt} [(m+M) \dot{x}_M - m \dot{s}_{II} \cos \alpha] = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_M = \frac{m}{m+M} \ddot{s}_{II} \cos \alpha \quad (3)$$

Aus (1) folgt mit Zwangsbed. $R\dot{\theta} - \dot{s}_{II} = 0 \Rightarrow R\ddot{\theta} = \ddot{s}_{II}$

$$m \ddot{s}_{II} = \lambda_1 \quad (5)$$

Damit folgt aus (3): $\ddot{x}_M = \frac{\lambda_1}{m+M} \cos \alpha$. Daraus und mit (5)

folgt aus (2):

$$\lambda_1 - \frac{m}{m+M} \lambda_1 \cos^2 \alpha - mg \sin \alpha = -\lambda_1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \left(2 - \frac{m}{m+M} \cos^2 \alpha \right) = mg \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = mg \frac{(M+m) \sin \alpha}{2M + m(1 + \sin^2 \alpha)}$$

Dies entspricht der gesuchten Zwangskraft, da $Z_{s_{II}} = \lambda_1 a_{1s_{II}} = -\lambda_1$.

Bemerkung: Betrachtet man s_{II} und θ nicht als unabhängig, so lässt sich nicht direkt ein Ausdruck für λ_1 finden.

D.h. man braucht unabh. Bew. gl. für s_{II} und θ um das Gleichungssystem zu lösen.