INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

Blatt 7

A1) $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$

a) Betrachte $I[x(t)] = \int_0^T dt\, L(x,\dot{x})$ explizit mit

$$x(t) = \sum_j a_j \cos(j\omega t) \Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega \sum_j j \cdot a_j \sin(j\omega t)$$

$$\Rightarrow I = \int_0^T dt \Big(\frac{m\omega^2}{2} \sum_{j,l} j \cdot l \cdot a_j a_l \sin(j\omega t)\sin(l\omega t)$$

$$- \frac{k}{2} \sum_{j,l} a_j a_l \cos(j\omega t)\cos(l\omega t) \Big)$$

→ Integrale auswerten:

$$\int_0^T dt \sin(j\omega t)\sin(l\omega t) = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} dt' \sin(jt')\sin(lt') = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\pi} dt' [\cos((j-l)t') - \cos((j+l)t')] \quad (*)$$

$$= \frac{1}{2\omega}\Big(\Big[\frac{1}{j-l}\sin((j-l)t')\Big]_0^{2\pi} - \Big[\frac{1}{j+l}\sin((j+l)t')\Big]_0^{2\pi}$$

→ nur ungleich 0 für $j = l$

$$\Rightarrow (*) = \frac{1}{2\omega}\delta_{jl}\int_0^{2\pi} dt' [1 - \underbrace{\cos(2jt')}_{\to 0}] = \underline{\underline{\frac{\pi}{\omega}\delta_{jl}}}$$

analog für $\int dt \cos(j\omega t)\cos(l\omega t)$. Unterschied: kein relatives (−) in (*).

$$\Rightarrow I = \frac{m\omega^2}{2}\frac{\pi}{\omega}\sum_{j,l}\delta_{lj}\cdot j \cdot l \cdot a_j a_l - \frac{k}{2}\frac{\pi}{\omega}\sum_{j,l}\delta_{jl} a_j a_l$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\Big[m\omega j^2 - \frac{k}{\omega}\Big]a_j^2$$

(gilt für beliebige Wahl von t_1, t_2 solange $|t_1 - t_2| = T = \frac{2\pi}{\omega}$)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

A1F

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

b) Jetzt betrachten wir $I[x(t)] = I(a_j)$ als Funktion der a_j und suchen nach Extrema, also:

$$\frac{\partial I}{\partial a_\ell} = 0 = \frac{\pi}{2} \sum_j [m\omega j^2 - \frac{k}{\omega}] 2 a_\ell \delta_{\ell j} = \pi a_\ell \left(\ell^2 m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \quad \forall \ell = 0, \dots, \infty$$

also i) $a_\ell = 0 \quad (\Rightarrow x(t) = 0)$

ii) $\ell^2 m \omega = \frac{k}{\omega}$

Bedingung (ii) kann jeweils nur für ein ℓ_0 erfüllt werden und

$$a_\ell = 0 \quad \forall \ell \neq \ell_0$$

Damit findet man $\omega^2 = \frac{1}{\ell_0^2} \frac{k}{m}$ und

$$x(t) = a_{\ell_0} \cos(\ell_0 \omega t) = a_{\ell_0} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

$\Rightarrow$ gleiche Lösung für alle ℓ_0 (bis auf beliebige Amplitude).

Wähle deshalb $\ell_0 = 1$ und damit $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ▨

Bemerkung: In dieser Betrachtungsweise ist ω kein freier Parameter, sondern durch das Zeitintervall $[0, T]$ fixiert.
Eine Variation von ω würde eine Variation der im Hamilton'schen Prinzip festgelegten Endpunkte bedeuten und dieses damit verletzen.

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2

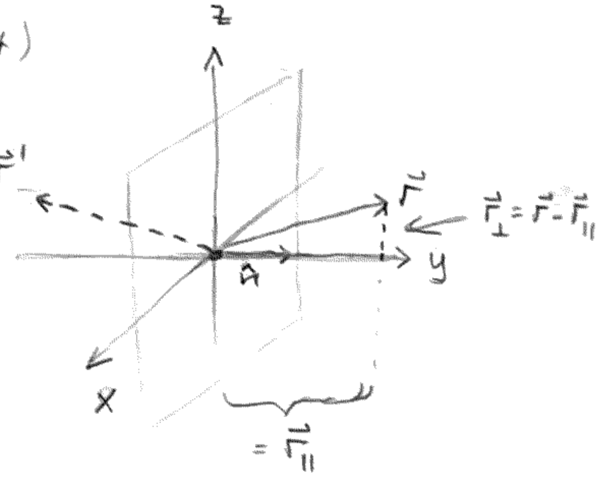
a) Betrachte Beispiel in Skizze:

Komponente von $\vec{r}$ in $\hat{n}$-Richtung (wird gespiegelt)

$$\vec{r}_{\parallel} = (\hat{n}\cdot\vec{r})\,\hat{n} = -\vec{r}_{\parallel}{}'$$

Komponente senkrecht dazu (bleibt gleich)

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel} = \vec{r} - (\hat{n}\cdot\vec{r})\hat{n} = \vec{r}_{\perp}{}'$$



$$\Rightarrow \vec{r}\,' = -(\hat{n}\cdot\vec{r})\hat{n} + \vec{r} - (\hat{n}\cdot\vec{r})\hat{n}$$

$$= \vec{r} - 2(\hat{n}\cdot\vec{r})\hat{n}$$

b) Mit den Projektionen $\ell_i = \hat{n}\cdot\hat{e}_i$ lässt sich $\hat{n}$ schreiben als:

$$\hat{n} = \sum_j \ell_j \hat{e}_j$$

Damit lassen sich die Komponenten r_i' von $\vec{r}\,'$ finden (Summenkonvention!)

$$r_i' = \hat{e}_i\cdot\vec{r}\,' = \hat{e}_i\cdot\vec{r} - 2(\hat{n}\cdot\hat{e}_j r_j)\,\hat{e}_i\hat{n} = r_i - 2\,\ell_i\ell_j r_j = \underbrace{(\delta_{ij} - 2\ell_i\ell_j)}_{= A_{ij}} r_j$$

c) Wir zeigen zunächst die Orthogonalität also $A^T A = \mathbb{1}$:

$$(A^T A)_{ij} = (A^T)_{ik} A_{kj} = A_{ki} A_{kj} = (\delta_{ki} - 2\ell_k\ell_i)(\delta_{kj} - 2\ell_k\ell_j)$$

$$= \delta_{ij} - 2(\ell_j\ell_i + \ell_i\ell_j) + 4\,\ell_i\ell_j \underbrace{\ell_k\ell_k}_{= \hat{n}^2 = 1} = \delta_{ij} = (\mathbb{1})_{ij}$$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2F|

cF) Nun zeigen wir, dass $\det A = -1$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1-2l_1^2 & -2l_1l_2 & -2l_1l_3 \\ -2l_2l_1 & 1-2l_2^2 & -2l_2l_3 \\ -2l_3l_1 & -2l_3l_2 & 1-l_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-2l_1^2)(1-2l_2^2)(1-2l_3^2) - (1-2l_1^2)4l_2^2l_3^2$$

$$-4l_1^2l_2^2(1-2l_3^2) - 8l_1^2l_2^2l_3^2$$

$$-8l_1^2l_2^2l_3^2 - 4l_1^2l_3^2(1-2l_2^2)$$

$$= 1-2(l_1^2+l_2^2+l_3^2) - 8l_1^2l_2^2l_3^2 + 4l_1^2l_2^2 + 4l_1^2l_3^2 + 4l_2^2l_3^2$$

$$-4l_2^2l_3^2 - 4l_1^2l_2^2 + 8l_1^2l_2^2l_3^2 - 4l_1^2l_3^2$$

$$= 1-2(l_1^2+l_2^2+l_3^2) = 1 - 2\underbrace{\hat{n}\cdot\hat{n}}_{=1} = -1$$

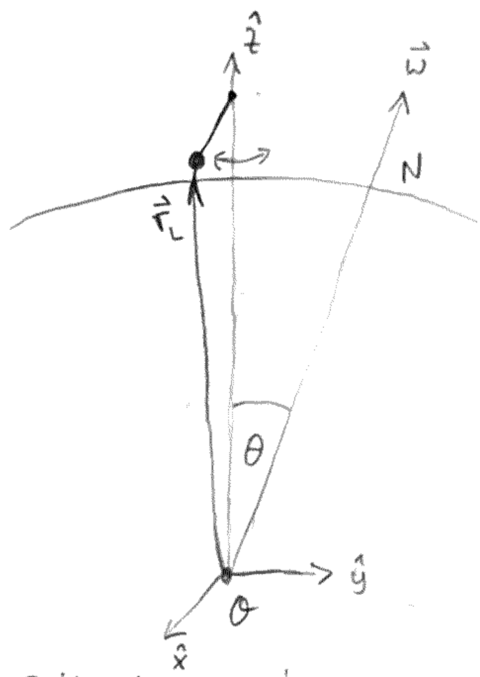
Komponenten von $\hat{n}$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A3

Wir beschreiben den Ort $\vec{r}_L$ des Pendels im Laborsystem L dessen Ursprung O im Erdmittelpunkt liegen soll und dessen z-Achse auf den Aufhängepunkt zeigt.



Das System rotiert um $\vec{\omega}$, welcher auf den Nordpol zeigt:

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{1d} = \frac{2\pi}{86400s}$$

Allgemein gilt für die Beziehung zwischen der Zeitableitung in einem Inertialsystem I und einem rotierenden System:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\cdot}_{\text{inertial}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\cdot}_{\text{rotierend}} + \vec{\omega}\times\cdot$$

also hier: $\frac{d}{dt}\vec{r}_I = \frac{d}{dt}\vec{r}_L + \vec{\omega}\times\vec{r}_L$ oder $\dot{\vec{r}}_I = \dot{\vec{r}}_L + \vec{\omega}\times\vec{r}_L$

und damit $\ddot{\vec{r}}_I = \ddot{\vec{r}}_L + \underbrace{\dot{\vec{\omega}}}_{=0}\times\vec{r}_L + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_L + \vec{\omega}\times(\dot{\vec{r}}_L + \vec{\omega}\times\vec{r}_L)$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_L = \ddot{\vec{r}}_I - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_L) - 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_L$$

oder $\vec{F}_{eff} = m\ddot{\vec{r}}_L = \vec{F}_a - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_L) - 2m\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_L$ (1)

Zentrifugalkr. Corioliskr.

effektive Kraft auf Körper im Laborsystem

Gewichtskraft (einzige Kraft, die im Inertialsystem wirkt.)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A3F

Die Aufgabenstellung suggeriert, dass sich die Bewegung des Pendels über eine Rotation $\vec{\omega}_P$ um die $\hat{z}$-Achse im Laborsystem beschreiben lässt. Also $\vec{\omega}_P = \omega_P \hat{z}$.

Wir beschreiben jetzt wie zuvor die Beziehung zwischen Pendelsystem P vs. Laborsystem L mit $\vec{\omega}_P$: (dazu betrachten wir einen Zeitpunkt, zu dem die Achsen der beiden Systeme überlappen)

$$\vec{r}_L = \vec{r}_P$$

$$\dot{\vec{r}}_L = \dot{\vec{r}}_P + \vec{\omega}_P \times \vec{r}_P$$

$$\ddot{\vec{r}}_L = \ddot{\vec{r}}_P + \vec{\omega}_P \times (\vec{\omega}_P \times \vec{r}_P) + 2\vec{\omega}_P \times \dot{\vec{r}}_P$$

Dies setzen wir in (1) ein:

$$\vec{F}_{eff} = m\ddot{\vec{r}}_P + m\vec{\omega}_P \times (\vec{\omega}_P \times \vec{r}_P) + 2\vec{\omega}_P \times \dot{\vec{r}}_P = \vec{F}_a - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_P) - 2m\vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}}_P + \vec{\omega}_P \times \vec{r}_P)$$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{\vec{r}}_P = \underbrace{-2m(\vec{\omega} + \vec{\omega}_P) \times \dot{\vec{r}}_P}_{=:\vec{F}_{c,P}} + \vec{F}_a \underbrace{- m\vec{\omega} \times [(\vec{\omega} + \vec{\omega}_P) \times \vec{r}_P] - (\vec{\omega}_P + \vec{\omega}) \times (\vec{\omega}_P \times \vec{r}_P)m}$$

Zentrifugalkraftterme wirken nur in $\vec{F}_a$-Richtung. Betrachte als Beispiel $\vec{r}_P$ am Äquator und verwende "Rechte-Hand-Regel" für die Richtungsbestimmung im doppelten Kreuzprodukt. (Oder betrachte Nordpol, wo das Kreuzprodukt verschwindet)

$\Rightarrow$ Keine "horizontale" Kraft

$\Rightarrow$ trägt nicht zu Rotation um $\hat{z}$-Achse bei.

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

A3F

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

$\Rightarrow$ Es genügt die Betrachtung der Corioliskraft:

Im guter Näherung (langes Pendel mit kleiner Auslenkung) können wir die Bewegung in $\hat{z}$-Richtung vernachlässigen: $\dot{z}_P \approx 0$

$$\Rightarrow \vec{F}_{c,P} = -2m(\vec{\omega}+\vec{\omega}_P)\times\dot{\vec{r}}_P \approx -2m\begin{pmatrix}0\\ \omega\sin\theta\\ \omega\cos\theta+\omega_P\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dot{x}_P\\ \dot{y}_P\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= -2m\begin{pmatrix}-\dot{y}_P(\omega\cos\theta+\omega_P)\\ \dot{x}_P(\omega\cos\theta+\omega_P)\\ -\dot{x}_P\,\omega\sin\theta\end{pmatrix}$$

} Bewirkt Rot. um $\hat{z}$-Achse

} weitere Modifikation der Gravitationskraft.

Im Pendel-Bezugssystem P möchten wir durch Wahl von ω_P erreichen, dass die Schwingungsebene des Pendels nicht rotiert:

$$\Rightarrow \quad \omega_P = -\omega\cos\theta$$

Im Laborsystem entspricht das einer Rotation der Pendelebene im Uhrzeigersinn. Betrachte dazu z. B.

$$\dot{\vec{r}}_L = \dot{\vec{r}}_P + \vec{\omega}_P\times\vec{r}_P = \dot{\vec{r}}_P \underbrace{-\,\omega\cos\theta\,\hat{z}\times\vec{r}_P}$$

würde in Skizze auf S. 5 in $(-\hat{y})$-Richtung zeigen