INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

Blatt 8

A1 a) Die Massen m sitzen an den Punkten:

$$\vec{r}_1 = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = a\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = a\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

Der Trägheitstensor ist gegeben durch

$$I_{ij} = m\sum_k \left(\delta_{ij}\vec{r}_k^{\,2} - r_{k_i} r_{k_j}\right)$$

$$\rightarrow \sum_k \vec{r}_k^{\,2} = a^2(1+5+5) = \underline{\underline{11a^2}}$$

Zweiter Term z.B. über dyadisches Produkt:

$$R = \sum_k r_{k_i} r_{k_j} = \left(\sum_k \vec{r}_k \otimes \vec{r}_k\right)_{ij} =$$

$$= a^2\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(1\,0\,0) + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}(0\,1\,2) + \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}(0\,2\,1)\right]_{ij}$$

$$= a^2\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&4&2\\0&2&1\end{pmatrix}\right]_{ij} = \underline{\underline{a^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&4\\0&4&5\end{pmatrix}_{ij}}}$$

$$\Rightarrow I = ma^2(11\cdot\mathbb{1} - R) = ma^2\begin{pmatrix}10&0&0\\0&6&-4\\0&-4&6\end{pmatrix}$$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A1

b) Bestimmung der Hauptträgheitsachsen über die Eigenvektoren von I:

$I \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$. Betrachte erste Zeile in $I \Rightarrow 10ma^2 (\vec{v}_1)_x = \hat{I}_k (\vec{v}_1)_x$

$$\Rightarrow \hat{I}_1 = 10\,ma^2 \;, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die weiteren EW, EV, betrachte Untermatrix $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda_k & -4 \\ -4 & 6-\lambda_k \end{pmatrix} = (\lambda_k - 6)^2 - 16 \Rightarrow \lambda_{2/3} = 6 \pm 4 = \begin{cases} 10 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{I} = \begin{pmatrix} 10ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 10ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2ma^2 \end{pmatrix}$$

übrige Eigenvektoren:

$$\vec{v}_2 \text{ über } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 \text{ über } \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Hauptträgheitsachsen sind also gegeben durch $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ -> Liefert orthogonale Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit } S^T I S = \hat{I}$$

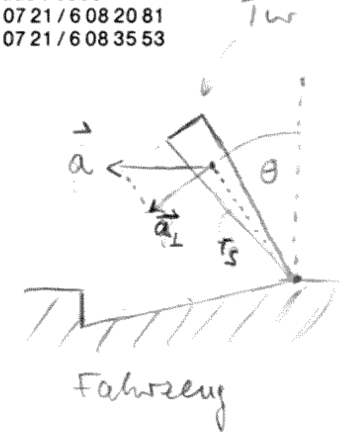
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}_{\varphi = \frac{\pi}{4}}$$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2

Ansicht von oben:



a) Die Beschleunigung des Fahrzeugs mit $\vec{a}$ bewirkt ein Drehmoment auf den Türschwerpunkt:

$$M = a_\perp \cdot r_s \cdot m = a \cdot r_s \cdot m \cdot \cos\theta$$

$$= I\dot{\omega} = m r_w^2 \ddot{\theta}$$

Trägheitsmoment — Trägheitsradius

also: $m r_w^2 \ddot{\theta} - a \cdot r_s \cdot m \cdot \cos\theta = 0$, vgl. mit $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

→ lässt sich ableiten aus der Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2} r_w^2 \dot{\theta}^2 + m \cdot a \cdot r_s \sin\theta = T - U$$

Da $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ist $H = \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = T + U = \text{const}$.

Betrachte $t = 0$: $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow H = 0$.

$$\Rightarrow H = 0 = \frac{m}{2} r_w^2 \dot{\theta}^2 - m a r_s \sin\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2 a r_s}{r_w^2} \sin\theta \Rightarrow \text{Trennung der Veränderlichen} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2 a r_s}}{r_w} \sqrt{\sin\theta}$$

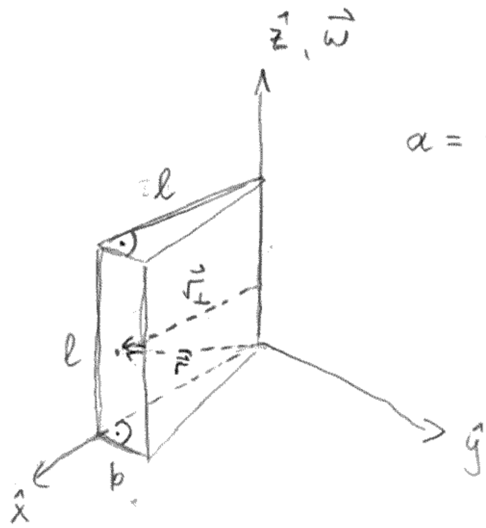
$$\Rightarrow dt = \frac{r_w}{\sqrt{2 a r_s}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \Rightarrow t_{end} = \frac{r_w}{\sqrt{2 a r_s}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \approx \frac{r_w}{\sqrt{2 a r_s}} \cdot 2.622\ldots$$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2)

b) Hierfür müssen wir über $m r_\omega^2 = I$ r_ω bestimmen. Dazu zunächst das Trägheitsmoment I:



$\alpha = \frac{b}{l}$

$$I = \int_V \vec{r}_\perp^{\,2}\, dm = \rho \int_0^l dz \int_0^l dx \int_0^{\alpha \cdot x} dy\, (x^2 + y^2)$$

$$= \rho \cdot l \int_0^l dx \left[y x^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^{\alpha \cdot x}$$

$$= \rho \cdot l \int_0^l dx \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} \right) x^3$$

$$= \rho \cdot l \cdot \alpha \left(1 + \frac{\alpha^2}{3}\right) \frac{l^4}{4} = \rho \underbrace{\frac{l^2 b}{2}}_{= V_{\text{Keil}}} \frac{l^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{3}\right) = m \frac{l^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{3}\right) \stackrel{!}{=} m r_\omega^2$$

$$\Rightarrow r_\omega = \underline{\frac{l}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{b^2}{3 l^2}}} = \frac{l}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}\left(\frac{b}{l}\right)$$

$$\underline{r_s \approx \frac{2}{3} l}$$

$$\Rightarrow t_{\text{end}} \approx \frac{r_\omega}{\sqrt{2 a r_s}} \cdot 2{,}622\ldots = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{l}{a}} \cdot 2{,}622. = \underline{3{,}21\, s}$$

Bemerkung: der Schwerpunkt lässt sich bestimmen über

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, dV = \frac{\rho}{M} \int_0^l dz \int_0^l dx \int_0^{\alpha \cdot x} dy \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 2l/3 \\ b/3 \\ l/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Abstand von Drehachse $r_s = \sqrt{\left(\frac{2l}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} l + \mathcal{O}\left(\frac{b}{l}\right)$