INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

$\boxed{\text{Blatt 9}}$

A1)

Eulersche Gleichungen für Drehmoment-freie Bewegung:

$$I_i \dot{\omega}_i + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \omega_j \omega_k I_k = 0$$

Betrachte o.B.d.A. Drehung um 1-Achse und lege später I_1 jeweils als das größte, mittlere und kleinste Trägheitsmoment fest.

$$\Rightarrow I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) = \mathcal{O}(\underbrace{\omega_2 \omega_3}_{\text{Komponenten} \perp \text{zu 1-Achse.}}) \simeq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\omega_1 \simeq const.}$$

(1) $I_2 \dot{\omega}_2 = \omega_3 \underbrace{\omega_1 (I_3 - I_1)}_{\approx const.} \quad \Rightarrow I_2 \ddot{\omega}_2 \simeq \dot{\omega}_3 \omega_1 (I_3 - I_1)$ (2)

$I_3 \dot{\omega}_3 = \omega_2 \omega_1 (I_1 - I_2)$ (3)

(3) in (2): $I_2 \ddot{\omega}_2 = \omega_2 \omega_1^2 \dfrac{(I_3 - I_1)(I_1 - I_2)}{I_3}$

analog: $I_3 \ddot{\omega}_3 = \omega_3 \omega_1^2 \dfrac{(I_1 - I_2)(I_3 - I_1)}{I_2}$

Definiere $\Omega^2 = \omega_1^2 \dfrac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)}{I_2 I_3}$

$\Rightarrow \ddot{\omega}_2 = -\Omega^2 \omega_2$ und $\ddot{\omega}_3 = -\Omega^2 \omega_3$

Allg. Lösung: $\omega_2(t) = \mathrm{Re}\left[a e^{i\Omega t} + b e^{-i\Omega t}\right]$

$\rightarrow$ ist nur dann beschränkt, wenn $\Omega^2 \geq 0$, also $\Omega \in \mathbb{R}$.

In diesem Fall schwanken ω_2 und ω_3 periodisch mit kleiner Amplitude (da in unserer Wahl der Drehung um die 1-Achse $\omega_2, \omega_3 \ll \omega_1$) $\Rightarrow$ Präzession um 1-Achse.

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A1F)

$\boxed{\Omega \in \mathbb{R}}$:

$\omega_2(t) = \tilde{a}\cos(\Omega t)$ (mit $\tilde{a} = a+b$)

$\dot{\omega}_2 = -\tilde{a}\Omega\sin(\Omega t)$

$(1) \Rightarrow \omega_3(t) = \frac{\dot{\omega}_2(t)}{\omega_1}\frac{I_2}{I_3-I_1} = \underbrace{-\tilde{a}\frac{\Omega}{\omega_1}\frac{I_2}{I_3-I_1}}_{\equiv \tilde{b}}\sin(\Omega t)$

d.h. $|\omega_2| \leq |\tilde{a}|$, $|\omega_3| \leq |\tilde{b}|$.

$\Omega \in \mathbb{R}$ wenn $\Omega^2 \geq 0$, d.h. wenn $(I_2-I_1)(I_3-I_1) \geq 0$

Dies ist der Fall, wenn:

i) $I_1 > I_3$, $I_1 > I_2$ (Drehung um größtes Hauptträgheitsmoment)

ii) $I_1 < I_3$, $I_1 < I_2$ (-"- kleinstes -"-)

$\boxed{\Omega \notin \mathbb{R}}$:

Gilt wenn $(I_2-I_1)(I_3-I_1) < 0$, also

iii) $I_1 < I_2$, $I_1 > I_3$ oder $I_1 > I_2$, $I_1 < I_3$

Dann ist Ω rein imaginär: $\Omega = i\lambda$ $(\lambda > 0)$

$\Rightarrow \omega_2(t) = a e^{-\lambda t} + b e^{\lambda t} = \omega_2^-(t) + \omega_2^+(t)$

$\omega_3(t) = \frac{\lambda}{\omega_1}\frac{I_2}{I_3-I_1}\left(-a e^{-\lambda t} + b e^{\lambda t}\right) = \frac{\lambda}{\omega_1}\frac{I_2}{I_3-I_1}\left(-\omega_2^-(t) + \omega_2^+(t)\right)$

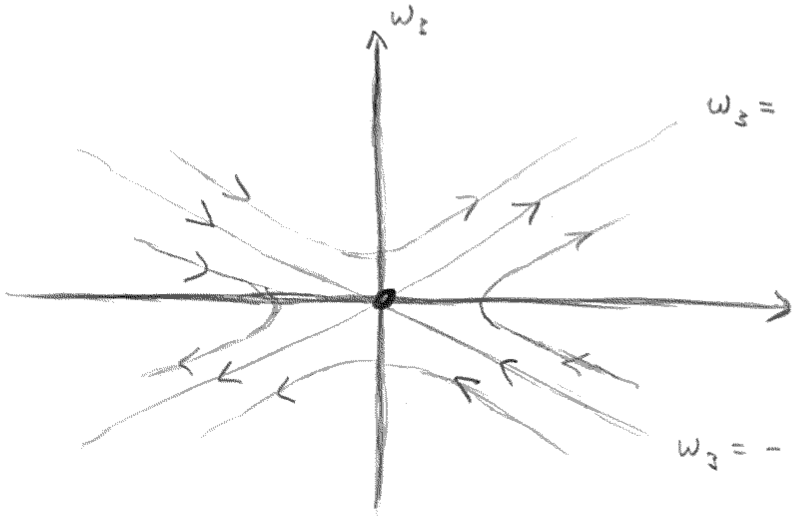
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A1F)

Für $b \neq 0$ wachsen sowohl ω_2 als auch ω_3 exponentiell an. Nur wenn $b \equiv 0$ nehmen beide exponentiell ab. Dies lässt sich grafisch darstellen:

$(I_1 < I_3)$

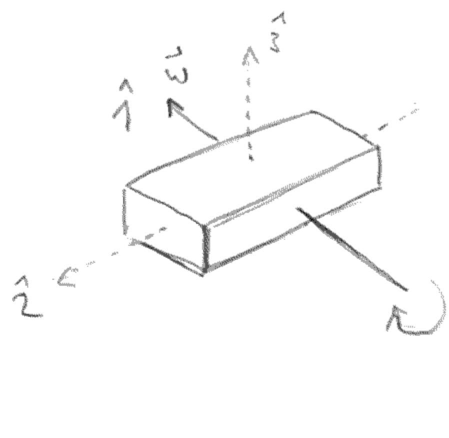


$$\omega_3 = \frac{\lambda}{\omega_1} \frac{I_2}{I_3 - I_1} \omega_2^+ \quad (a=0)$$

$$\omega_3 = -\frac{\lambda}{\omega_1} \frac{I_2}{I_3 - I_1} \omega_2^- \quad (b=0)$$

$\Rightarrow$ Der Punkt $\omega_2 = \omega_3 = 0$ ist höchst instabil!

Beispiel: Drehung um mittleres Hauptträgheitsmoment eines Quaders:



$I_1 > I_2, \; I_1 < I_3$

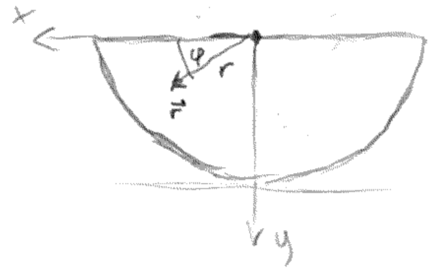
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2)

a) In Zylinderkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \text{Masse: } M = \int_V \varrho\, dV = \varrho \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r\, dr$$

$$= \varrho L \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\text{Schwerpunkt: } \vec{r}_s = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, \varrho\, dV = \frac{\varrho}{M} \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\varrho L}{M} \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\varrho L}{M} \frac{2}{3} R^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3\pi} R \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trägheitsmoment bezüglich Symmetrieachse (hier: z-Achse)

$$I_0 = \int r_\perp^2\, \varrho\, dV = \varrho \cdot L \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r^3 = \varrho \cdot L \cdot \pi \frac{R^4}{4} = M \frac{R^2}{2}$$

Trägheitsmoment bezüglich parallel in den Schwerpunkt verschobener Symmetrieachse: (Steiner'scher Satz)

$$I_s = I_0 - M d^2 = I_0 - M \left(\frac{4}{3\pi} R\right)^2 = M R^2 \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right)$$

$$= M \left(\frac{R^2}{2} - d^2\right)$$

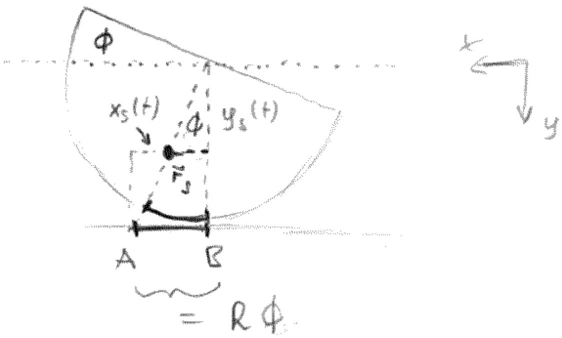
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

(5)

A2FI

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

b) Bewegung des Schwerpunktes:



$$x_s(t) = -(\overline{AB} - d \cdot \sin\phi)$$

$$= d \cdot \sin\phi - R\phi$$

$$y_s(t) = d \cdot \cos\phi$$

$$z_s(t) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow T_s = \frac{M}{2}(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2) = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(d \cdot \cos\phi - R)^2$$

$$+ \frac{M}{2}\dot{\phi}^2 d^2 \sin^2\phi$$

$$= \frac{M}{2}\dot{\phi}^2(d^2 - 2dR\cos\phi + R^2)$$

Rotationsenergie (um Schwerpunktsachse):

$$T_R = \frac{I_s}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2\left(\frac{R^2}{2} - d^2\right)$$

Potentielle Energie:

$$U = -M \cdot g\, d \cos\phi$$

$$\Rightarrow L = T - U = \frac{M}{2}\dot{\phi}^2\left(\frac{3}{2}R^2 - 2dR\cos\phi\right) + Mg\,d\cos\phi$$

(6)

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2F

c) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) = \frac{d}{dt}\left[M\dot\phi\left(\frac{3}{2}R^2 - 2dR\cos\phi\right)\right]$$

$$= M\ddot\phi\left(\frac{3}{2}R^2 - 2dR\cos\phi\right) + M\dot\phi^2\, 2dR\sin\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = M\dot\phi^2 dR\sin\phi - Mgd\sin\phi$$

$$\Rightarrow \quad \ddot\phi\left(\frac{3}{2}R^2 - 2dR\cos\phi\right) = -\dot\phi^2 dR\sin\phi - gd\sin\phi$$

Für kleine Auslenkungen: $\cos\phi = 1 + \mathcal{O}(\phi^2)$, $\sin\phi = \phi + \mathcal{O}(\phi^2)$, $\dot\phi^2 R \ll g$

$$\Rightarrow \quad \ddot\phi\left(\frac{3}{2}R^2 - 2dR\right) = -gd\phi$$

$$\Rightarrow \quad \ddot\phi = -\frac{g}{\frac{3}{2}R^2 - 2dR}\, d\cdot\phi = -\underbrace{\frac{g}{R\left(\frac{9\pi}{8} - 2\right)}}_{=\omega^2}\phi$$

$\Rightarrow$ Schwingungsfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R\left(\frac{9\pi}{8} - 2\right)}}$$