Klassische Theoretische Physik II

Institut für Theoretische Physik

Vorlesung: Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld; Übung: Dr. Maximilian Löschner

Übungsblatt 10 SoSe 2020

Abgabe: Freitag, 3. 7. 2020 bis 12:00

Die Abgabe der Blätter erfolgt durch Upload in Ihrem ILIAS-Tutorium *Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik II*.

Aufgabe 1. 3 P.

Ein mit einer beliebigen Verteilung von Elektronen (Ladung $-e$, Masse m) geladener, rotierender Körper besitzt aufgrund der Bewegung der Elektronen ein magnetisches Moment

$$\vec{\mu} = \frac{-e}{2m}\vec{L},$$

Wird der Körper in ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ gebracht, wirkt daher ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad \text{so dass} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{2m}\vec{L} \times \vec{B}.$$

Im folgenden sei $\vec{B} = B\hat{e}_z$

(a) Zeigen Sie, dass sowohl L_z als auch $|\vec{L}|^2$ Erhaltungsgrößen sind, ohne dabei die Bewegungsgleichungen zu lösen. (1 P.)

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\vec{L}(t)$ ausgedrückt durch die Konstanten $L^2 = |\vec{L}|^2$ und L_z. (2 P.)

Aufgabe 2. 3 P.

In dieser Aufgabe betrachten wir die Legendre-Transformation, die u.a. Anwendung im Hamilton-Formalismus findet. Betrachten Sie eine konvexe Funktion $f(x)$ (also $f''(x) > 0$). Betrachten Sie zusätzlich die Gerade $y = px$, $p > 0$. Nun sei $x(p) = x_p$ der Punkt, an dem die Kurve $f(x)$ am weitesten von der Geraden in vertikaler Richtung entfernt ist, d.h. die Funktion

$$F(p,x) = px - f(x)$$

hat ein Maximum in Bezug auf x für $x = x_p$. Die Legendre- Transformierte $g(p)$ ist dann definiert durch

$$g(p) = F(p, x_p).$$

(a) Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte von $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$. (1 P.)

(b) Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(p)$ heißen dual im Youngschen Sinne, falls sie die Legendre-Transformierte der jeweils anderen sind. Die Youngsche Ungleichung für diesen Fall ist

$$xp \leq f(x) + g(p).$$

Zeigen Sie hiermit

$$xp \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}, \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

wobei $\alpha, \beta > 1$ und $x, p > 0$ gelten soll. (1 P.)

(c) Wie lässt sich die Legendre-Transformation geometrisch interpretieren? (1 P.)

Aufgabe 3. 7 P.

Finden Sie die verallgemeinerten Impulse, die Hamilton-Funktion und die Hamiltonischen Bewegungsgleichungen für die folgenden Systeme:

(a) Ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension. (1 P.)

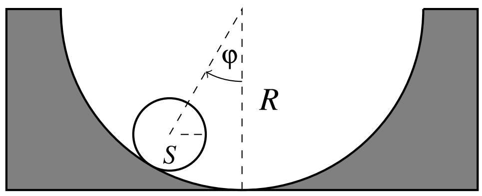
(b) Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator der Masse m und Winkelfrequenz ω. (1 P.)

(c) Ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potenzial $U(x) = \alpha x^n$. (1 P.)

(d) Ein Teilchen der Masse m in einem dreidimensionalen Potenzial $U(r) = -k/r$. Arbeiten Sie hier mit Kugelkoordinaten. (2 P.)

(e) Zwei Teilchen der Massen m und M die gravitativ in einer zweidimensionalen Ebene miteinander interagieren ($U = -mMG/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$). Nutzen Sie für beide Teilchen kartesische Koordinaten x_i, y_i. Was wäre eine bessere Wahl der Koordinaten? (2 P.)

Aufgabe 4. 7 P.



Wir betrachten ein Modell für eine skatende Person, die unglücklicherweise einen Sturz in einer Halfpipe erleidet.
Auf der Innenfläche eines raumfesten Zylindermantels (Halfpipe) mit Radius R rolle ein Zylinder (SkaterIn) mit Radius S und Masse m ohne zu rutschen im homogenen Schwerefeld der Erde. Die zylinderförmige Person habe eine radial nach außen abnehmende Dichte $\rho(r) = \rho_0(S-r)/S$. Die beiden Zylinderachsen seien stets parallel.

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des rollenden Zylinders um die Drehachse als Funktion von m und S. (2 P.)

(b) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf. Nutzen Sie dabei die Beziehung zwischen der Winkelgeschwindigkeit der SkaterIn $\dot{\varphi}$ (Winkelgeschwindigkeit des Zylinderschwerpunktes vom Zentrum der Halfpipe aus gesehen) und der Rotation des Zylinders. (3 P.)

(c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung ab und lösen Sie sie im Grenzfall kleiner Rollbewegungen. Vergleichen Sie mit dem mathematischen Pendel (d.h. mit einem harmonischen Oszillator) entsprechender Länge und Masse. (2 P.)