

Blatt 10

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A1

$$\vec{\mu} = \frac{-e}{2m} \vec{L}, \quad \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{-e}{2m} \vec{L} \times \vec{B}$$

$$a) \vec{B} = B \vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{-eB}{2m} \vec{L} \times \vec{e}_z = \vec{M} \Rightarrow \vec{M} \perp \vec{e}_z, \vec{M} \perp \vec{L}$$

(*) (**)

$$\text{aus } (*) \Rightarrow M_z = 0 = \frac{dL_z}{dt}$$

$$\text{außerdem: } \frac{d}{dt} |\vec{L}|^2 = \frac{\partial}{\partial L_i} |\vec{L}|^2 \frac{dL_i}{dt} = 2L_i \frac{dL_i}{dt} = 2\vec{L} \cdot \vec{M} \stackrel{(**)}{=} 0$$

$$\text{also } \frac{d|\vec{L}|^2}{dt} = 0$$

$$b) \frac{d\vec{L}}{dt} = -\omega_L \vec{L} \times \vec{e}_z \quad \text{mit } \omega_L = \frac{e}{2m} > 0 \quad (\text{Larmorfrequenz})$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{L}_x \\ \dot{L}_y \\ \dot{L}_z \end{pmatrix} = -\omega_L \begin{pmatrix} L_y \\ -L_x \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \ddot{L}_x \\ \ddot{L}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_L \begin{pmatrix} -\dot{L}_y \\ \dot{L}_x \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega_L^2 \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{}$$

$$\text{allg. Lösung: } L_x(t) \stackrel{(2)}{=} A \cos(\omega_L t - \varphi_0), \quad L_y(t) \stackrel{(1),(2)}{=} A \sin(\omega_L t - \varphi_0)$$

A ist gegeben durch L_z und $L^2 = |\vec{L}|^2$:

$$|\vec{L}(t)|^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = A^2 + L_z^2 = L^2 \Rightarrow A^2 = L^2 - L_z^2$$

$$\Rightarrow \vec{L}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{L^2 - L_z^2} \cos(\omega_L t - \varphi_0) \\ \sqrt{L^2 - L_z^2} \sin(\omega_L t - \varphi_0) \\ L_z \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \sqrt{L^2 - L_z^2} \cos(\omega_L t - \varphi_0) \\ \sqrt{L^2 - L_z^2} \sin(\omega_L t - \varphi_0) \\ L_z \end{pmatrix}} \right\} \text{ Kreisbewegung um } \vec{B} \text{ herum.}$$

A21

$$a) \quad g(p) = \sup_x (p \cdot x - \underbrace{f(x)}_{= F(p, x)})$$

$$f'(x) > 0$$

$$= \max (p \cdot x - f(x))$$

Maximum des Abstandsfkt. bestimmen:

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad \alpha > 1$$

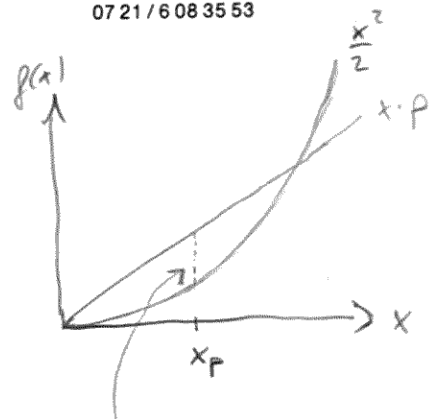
$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = p - x^{\alpha-1} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_p = p^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\Rightarrow g(p) = F(p, x_p) = p \cdot p^{\frac{1}{\alpha-1}} - \frac{p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha-1}{\alpha} p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53



entspricht Achsenabschnitt
der Tangenten an $f(x)$
mit Steigung p .

$$b) \quad x p \leq f(x) + g(p)$$

$$\Rightarrow x p \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \underbrace{\frac{\alpha-1}{\alpha} p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}_{\equiv \beta} = \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$$

$$\text{wobei } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1$$

c) Über die Legendre-Transformation lässt sich eine Fkt. $f(x)$ über die Menge ihrer Tangenten ausdrücken.

Diese haben die Form $p \cdot x - g(p)$. Die Legendre-Transform. $g(p)$ stellt also den Achsenabschnitt der Tangenten mit Steigung p dar. Grafiken dazu siehe Mathematica-Datei.

A3

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

verallgemeinerte Impulse:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

unabh. Koordinaten

$$\text{Hamilton-Funktion: } H = \sum_{j=1}^s p_j \dot{q}_j - L$$

$$\text{Bewegungsgl.: } \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

a) $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \Rightarrow p_x = m \dot{x}, \quad H = p_x \dot{x} - \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \underline{\underline{\frac{p_x^2}{2m}}}$

$$\underline{\underline{\dot{x} = \frac{p_x}{m}}}, \quad \underline{\underline{\dot{p}_x = 0}}$$

b) $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \Rightarrow p_x = m \dot{x}, \quad H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$

$$\underline{\underline{\dot{x} = \frac{p_x}{m}}}, \quad \underline{\underline{\dot{p}_x = -m\omega^2 x}}$$

c) $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \alpha x^n \Rightarrow p_x = m \dot{x}, \quad H = \frac{p_x^2}{2m} + \alpha x^n$

$$\underline{\underline{\dot{x} = \frac{p_x}{m}}}, \quad \underline{\underline{\dot{p}_x = -n\alpha x^{n-1}}}$$

d) $L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{K}{r} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{K}{r}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p_r = m\dot{r}}}, \quad \underline{\underline{p_\theta = mr^2\dot{\theta}}}, \quad \underline{\underline{p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}}}$$

$$\hookrightarrow L = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \frac{K}{r}$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{K}{r}$$

A3F

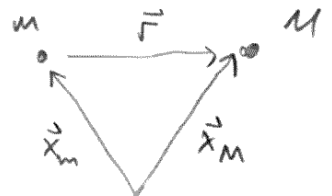
76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = -\frac{K}{r^2} + \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) \frac{1}{m r^3}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{p_\varphi^2}{2 m r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{p_\varphi^2}{m r^2} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2 \theta}, \quad \dot{p}_\varphi = 0$$

e) $U = -\frac{m M G}{|\vec{x}_m - \vec{x}_M|}$



$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} (\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + \frac{M}{2} (\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2) + \frac{m M G}{\sqrt{(x_m - x_M)^2 + (y_m - y_M)^2}} \quad (\text{Betrachte nur 2D.})$$

Verallgemeinerte Impulse haben alle die Form: $p_{x_i, m_i} = m_i \dot{x}_{i, m_i}$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2m} (p_{x_m}^2 + p_{y_m}^2) + \frac{1}{2M} (p_{x_M}^2 + p_{y_M}^2) - \frac{m M G}{\sqrt{(x_m - x_M)^2 + (y_m - y_M)^2}}$$

Auch die Bewegungsgl. sind alle von gleicher Form:

$$\dot{x}_{i, m_i} = \frac{p_{x_i, m_i}}{m_i}, \quad \dot{p}_{x_i, m_i} = -m M G \frac{x_{i, m} - x_{i, M}}{\sqrt{\dots}}$$

$$\dot{p}_{x_i, M} = -m M G \frac{x_{i, M} - x_{i, m}}{\sqrt{\dots}}$$

Beschreibung vereinfacht durch Verwendung von Relativkoordinaten und Schwerpunktsbewegung:

$$\vec{x}_m - \vec{x}_M = \vec{r} \quad \Rightarrow \quad |\vec{x}_m - \vec{x}_M| = r, \quad \vec{r}_S = \frac{m \vec{x}_m + M \vec{x}_M}{m + M}$$

$$\Rightarrow L = \frac{m+M}{2} \dot{\vec{r}}_S^2 + \underbrace{\frac{m \cdot M}{2(m+M)}}_{\mu} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{m M G}{r} \quad \begin{array}{l} \text{zusätzlich sinnvoll:} \\ \vec{r} \text{ in Polarkoordinaten} \end{array}$$

$\equiv \mu (\text{Relativmasse})$

A4/

76128 KARLSRUHE,

Postfach 6380

Tel. 07 21 / 6 08 20 81

07 21 / 6 08 35 53

$$\begin{aligned} a) \quad I &= \int \vec{r}_\perp^2 dm = \\ &= \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^S dr \cdot r^3 \cdot \underbrace{\rho_0 \frac{(S-r)}{S}}_{= \rho(r)} = \frac{2\pi \cdot L \cdot \rho_0}{S} \int_0^S dr (S r^3 - r^4) \\ &= \frac{2\pi L \rho_0}{S} \left[S \frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right]_0^S = 2\pi L \rho_0 S^4 \frac{1}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Masse: } m &= \int \rho(\vec{r}) dV = \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^S dr r \rho_0 \left(\frac{S-r}{S} \right) = \frac{2\pi L \rho_0}{S} \int_0^S (S r - r^2) dr \\ &= 2\pi L \rho_0 S^2 \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi L \rho_0 S^4}{6} \cdot \frac{1}{20} = m S^2 \frac{3}{10}$$

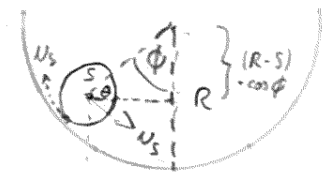
b) Ähnlich wie in A3, Blatt 6: Zwangsbedingung für das Abrollen des Zyl.

Die Geschwindigkeit mit der sich der

Schwerpunkt bewegt ist $v_s = (R-S) \dot{\phi}$.

Dies entspricht der Tangentialgeschw. des

rotierenden Zylindersrandes, also $v_s = S \cdot \dot{\theta}$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\theta} &= \frac{R-S}{S} \dot{\phi} \Rightarrow \text{Rotationsenergie } T_{\text{rot}} = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{I}{2} \left(\frac{R-S}{S} \right)^2 \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{3}{20} m (R-S)^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

$$T = T_{\text{kin}} + T_{\text{rot}} = \frac{m}{2} (R-S)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{3}{20} m (R-S)^2 \dot{\phi}^2 = \frac{m}{2} \frac{13}{10} (R-S)^2 \dot{\phi}^2$$

$$U = -m \cdot g (R-S) \cos \phi + U_0$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} \frac{13}{10} (R-S)^2 \dot{\phi}^2 + m g (R-S) \cos \phi$$

A4F

76128 KARLSRUHE,

Postfach 6380

Tel. 07 21 / 6 08 20 81

07 21 / 6 08 35 53

$$c) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \frac{13}{10} (R-S)^2 \ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mg (R-S) \sin \phi$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{10}{13} \frac{g}{R-S} \sin \phi$$

Kleinwinkelnäherung: $\sin \phi \approx \phi$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = \underbrace{-\frac{10}{13} \frac{g}{R-S}}_{=\omega^2} \phi + \mathcal{O}(\phi^2)$$

mathematisches Pendel: $\omega_p^2 = \frac{g}{l}$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{\omega_p} \approx \sqrt{\frac{10}{13}} \quad \text{für } l = R-S$$

oder wähle $\frac{13}{10} (R-S) = l_{\text{eff}}$ als effektive Pendellänge

$$\Rightarrow \underline{\underline{l_{\text{eff.}} = \frac{13}{10} l}}$$