

Klassische Theoretische Physik II

Institut für Theoretische Physik

Vorlesung: Prof. Dr. Dieter Zeppenfeld; Übung: Dr. Maximilian Löschner

Übungsblatt 11

SoSe 2020

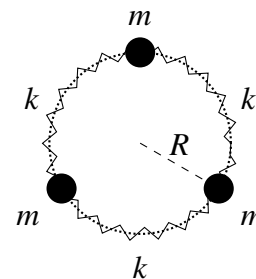
Abgabe: Freitag, 10. 7. 2020 bis 12:00

Die Abgabe der Blätter erfolgt durch Upload in Ihrem ILIAS-Tutorium *Übungen zur Klassischen Theoretischen Physik II*.

Aufgabe 1.

7 P.

Drei Massenpunkte m bewegen sich reibungsfrei auf einem Kreisring vom Radius R . Sie sind durch drei identische, ideale Federn mit Federkonstante k entlang der Kreisbögen miteinander verbunden, die in Ruhelage entspannt sind. Es wirken keine weiteren Kräfte.



- (a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion mit den Winkelauslenkungen ϕ_i ($i = 1, 2, 3$) aus der Ruhelage auf. (2 P.)

Hinweis: Sie sollten finden: $L = \frac{mR^2}{2} \sum_i \dot{\phi}_i^2 - kR^2 (\sum_i \phi_i^2 - \phi_1\phi_2 - \phi_1\phi_3 - \phi_2\phi_3)$

- (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Diese sollten die Form $\ddot{\phi}_i = -A_{ij}\phi_j$ haben (Summenkonvention!). Bestimmen Sie über die Eigenwertgleichung $A\vec{\phi} = \omega^2\vec{\phi}$ die Eigenfrequenzen (über die Eigenwerte von A) und Eigenmoden (über die Eigenvektoren) des Systems. (3 P.)

- (c) Wie lautet die allgemeine Lösung für $\vec{\phi}$, zusammengesetzt als Summe aus den drei Eigenmoden des Systems? Beschreiben Sie kurz die resultierende Bewegung der Massen für die einzelnen Eigenmoden. (2 P.)

Aufgabe 2.

10 P.

Wir betrachten das System eines ein-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

- a) Überprüfen Sie, dass folgende Angaben eine Lösung darstellen: (2 P.)

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi_0), \quad p(t) = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \phi_0)$$

- b) Skizzieren Sie den Pfad einer Schwingung im (x, p) -Phasenraum, und geben Sie dabei die Abhängigkeit von E und t an. (2 P.)
- c) Wir betrachten nun die Unschärfe im (x, p) -Phasenraum, die für dieses System durch eine ungenaue Messung von E und t zustande kommt. Es seien m und ω präzise bekannt. Die gemessene Energie liege im Intervall $[E_0 - \Delta E/2, E_0 + \Delta E/2]$ und die Zeit in $[t_0 - \Delta t/2, t_0 + \Delta t/2]$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt $\Delta x \Delta p$ der Oberfläche im (x, p) -Phasenraum in dem sich das Teilchen bei einer solchen Messung befinden kann. (ΔE und Δt können Sie als *kleine* Messunschärfen interpretieren.) (2 P.)

Hinweis: Betrachten Sie die infinitesimale Fläche $dA(x, p) = dx dp$ und wechseln Sie zu den Variablen $dA(E, t) = |J| dE dt$, wobei J die Jacobi-Determinante für den Variablenwechsel bezeichnet.

- d) Nun führen wir eine kanonische Transformation zu den neuen Variablen X und P aus, die definiert ist durch die erzeugende Funktion

$$F(x, X) = \frac{m\omega}{2} x^2 \cot X.$$

Hierbei ist $\cot(z) = \cos(z)/\sin(z)$ der Kotangens. Finden Sie Ausdrücke für x und p in Abhängigkeit von X und P . (2 P.)

- e) Vergleichen Sie diese Ausdrücke, also $x(X, P)$ und $p(X, P)$ mit denen aus Aufgabenteil (a) und finden Sie so Ausdrücke für $X(E, t)$ und $P(E, t)$. (1 P.)
- f) Skizzieren Sie den Pfad einer Schwingung im (X, P) -Phasenraum, und berechnen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche auf der sich das Teilchen befinden kann, falls es die in (c) beschriebene Unbestimmtheit ΔE und Δt trägt. (1 P.)

Aufgabe 3.

3 P.

Kehren Sie die Legendre-Transformation um, um die Eigenschaften der Lagrange-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ aus der Hamilton-Funktion $H(q_i, p_i, t)$ abzuleiten. Betrachten Sie dazu $\dot{q}_i$ als unabhängige Variable, bzw. als Steigung von $H(q_i, p_i, t)$ in Bezug auf p_i . Zeigen Sie, dass dies auf die Lagrange-Bewegungsgleichungen führt.