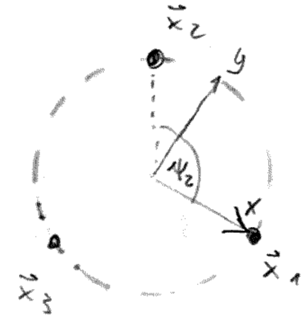
Blatt 11

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

A1)

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

a) Orte der Massenpunkte in ebenen Polar Koord.



$$\vec{x}_i = R \begin{pmatrix} \cos\psi_i \\ \sin\psi_i \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \psi_i: \text{Absolutwinkel} \\ \phi_i: \text{Auslenkung aus Ruhelage} \end{array}$$

mit $\psi_1 = \phi_1$, $\psi_2 = \phi_2 + \frac{2\pi}{3}$, $\psi_3 = \phi_3 - \frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2} \sum_i \dot{\vec{x}}_i^2 = \frac{mR^2}{2} \sum_i \dot{\psi}_i^2 = \frac{mR^2}{2} \sum_i \dot{\phi}_i^2$$

Potentielle Energie bestimmt durch Abstände der Massen auf dem Kreis.

Zurückgelegte Strecke auf Kreis: $s_i = R\phi_i$

$$\Rightarrow U_{ij} = \frac{k}{2}(s_i - s_j)^2 = \frac{kR^2}{2}(\phi_i - \phi_j)^2$$

$$U_{ges} = \underbrace{\sum_{i<j}}_{= \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{j-1}} U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} U_{ij} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

$$\Rightarrow L = \frac{mR^2}{2} \sum_i \dot{\phi}_i^2 - \frac{kR^2}{2} \sum_{i<j} (\phi_i - \phi_j)^2$$

$$= \frac{mR^2}{2}(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2) - kR^2(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 - \phi_1\phi_2 - \phi_1\phi_3 - \phi_2\phi_3)$$

Anmerkung: Man kann U_{ij} auch über die ψ_i bestimmen. Dies entspricht jedoch nur einer konstanten Verschiebung um U_0 $\Rightarrow$ keine veränderte Dynamik

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

b) Euler - Lagrange - Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi_i} \Rightarrow m R^2 \ddot{\phi}_i = -kR^2 \left(2\phi_i - \sum_{j\neq i} \phi_j\right)$$

$$= -kR^2 \Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\equiv A} \vec{\Phi} \Bigg]_i$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{\Phi}} = -\frac{k}{m} A \vec{\Phi}$$

Suche jetzt nach Eigenfrequenzen ω_K und Eigenmoden $\vec{v}_K$, die die Eigenwertgleichung:

$$-\frac{k}{m} A \vec{v}_k = -\omega_k^2 \vec{v}_k \quad \text{bzw.} \quad A \vec{v}_k = \lambda_K \vec{v}_k \quad \text{erfüllen}$$

$$\Rightarrow \text{über } \det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] + \left[-(2-\lambda) - 1\right] - \left[1 + 2 - \lambda\right]$$

$$= (2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda) - 2$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 + 3\lambda - 8 = -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9)$$

$$= -\lambda(\lambda - 3)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{23} = 3 \quad \text{und damit} \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_{2/3} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A1F)

Nun bestimmen wir die Eigenmoden

über $(A - \lambda_k \mathbb{1})\vec{v}_k = \vec{0}$

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 - z_2]{z_2 + \frac{1}{2} z_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 + 2z_2]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{2/3} = 3: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ nicht eindeutig!

Bemerke: $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \neq 0$. Stattdessen möglich:

$$\vec{v}_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$$

c) Bewegungsgleichung: $\ddot{\vec{\Phi}}_k = -\omega_k^2 \vec{\Phi}_k$

$$\omega_1 = 0: \quad \ddot{\vec{\Phi}}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Phi}_1(t) = (a_1 t + b_1)\vec{v}_1$$

$$\omega \equiv \omega_{2/3} = \sqrt{\frac{3k}{m}}: \quad \ddot{\vec{\Phi}}_{2/3} = -\omega^2 \vec{\Phi}_{2/3} \Rightarrow \vec{\Phi}_{2/3}(t) = [a_{2/3} \sin(\omega t + \varphi_{0,2/3})]\vec{v}_{2/3}$$

$\Rightarrow$ allg. Lösung:

$$\vec{\Phi}(t) = (a_1 t + b_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_2 \sin(\omega t + \varphi_{0,2}))\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a_3 \sin(\omega t + \varphi_{0,3}))\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

oder

$$= \quad - \,\,'' \,\, - \quad + (a_3' \sin(\omega t + \varphi_{0_3}'))\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Eigenmode $\vec{v}_3'$ lässt sich durch entsprechende Wahl der Konstanten erzeugen. Auch die Normierung der EV kann hier absorbiert werden. Graphische Interpretation siehe Mathematica-Datei.

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

a) Bewegungsgleichungen:

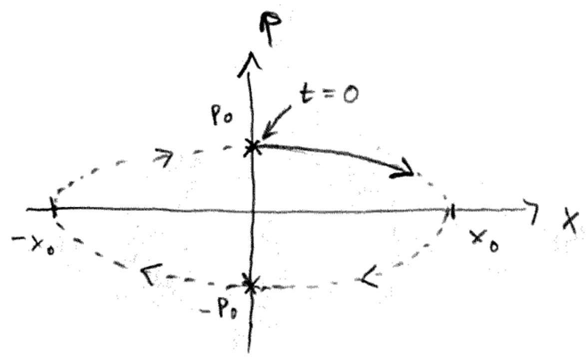
$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \text{also: } \dot x = \frac{p}{m}, \quad \dot p = -m\omega^2 x$$

mit $x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \dot x(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}}\cos(\omega t + \phi_0) = \frac{1}{m}p(t)$ ✓

$$p(t) = \sqrt{2Em}\cos(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \dot p(t) = -\omega\sqrt{2Em}\sin(\omega t + \phi_0)$$

$$= -m\omega^2\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \phi_0) = -m\omega^2 x(t)$$ ✓

b)



Wähle z.B. $\phi_0 = 0$

$$x_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}, \quad p_0 = \sqrt{2Em}$$

→ Ellipse im Phasenraum.

Kleine und große Halbachse wachsen mit $\sqrt{E}$. Bewegung im Phasenraum läuft im Uhrzeigersinn.

c) Übergang zu neuen Variablen im infinitesimalen Flächenelement allgemein:

$$dA(x_1, x_2) = \underbrace{\left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right|}_{\text{Betrag der Jacobi-Determinante.}} dy_1 dy_2$$

Hier: $$dA(x,p) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial E} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial E} & \frac{\partial p}{\partial t} \end{matrix} \right\| dE\,dt = \left\| \begin{matrix} \sqrt{\frac{1}{2Em\omega^2}}\sin(\omega t + \phi_0) & \sqrt{\frac{2E}{m}}\cos(\omega t + \phi_0) \\ \sqrt{\frac{m}{2E}}\cos(\omega t + \phi_0) & -\sqrt{2Em\omega^2}\sin(\omega t + \phi_0) \end{matrix} \right\| dE\,dt$$

$$= |-1|\,dE\,dt = dE\,dt$$

⇒ Die im Phasenraum eingenommene Fläche $A = \Delta x \Delta p$ ist gleich $\underline{\underline{A = \Delta E \Delta t}}$

Dies beschreibt die ungenaue Lage des System im Phasenraum bei (vermeidbaren) Messfehlern. Diese Betrachtung dient als Heranführung an die fundamentalen (unvermeidbaren) Unschärferelationen in der Quantenmechanik.

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2F

d) Erzeugende Funktion $F = \frac{m\omega}{2} x^2 \cot(\chi) = F(x,\chi)$

Für ein F dieser Form hat man:

$$p = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{und} \quad P = -\frac{\partial F}{\partial \chi}$$

also $p = m\omega x \cot(Q)$ und $P = \frac{m\omega}{2} \frac{x^2}{\sin^2\chi}$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{m\omega}}\sqrt{P}\sin\chi$$

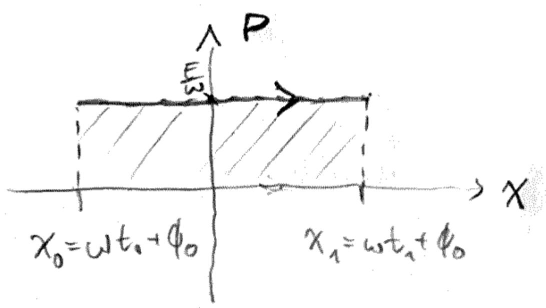
und damit $p = \sqrt{2m\omega}\sqrt{P}\cos\chi$

e) Vergleiche mit (a):

$$\left.\begin{aligned} x(P,\chi) &= \sqrt{\frac{2}{m\omega}}\sqrt{P}\sin\chi \\ x(E,t) &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \phi_0) \end{aligned}\right\} \text{identisch, wenn } \begin{aligned} P &= \frac{E}{\omega} \\ \chi &= \omega t + \phi_0 \end{aligned}$$

Einsetzen in $p = \sqrt{2m\omega}\sqrt{P}\cos\chi = \sqrt{2mE}\cos(\omega t + \phi_0)$ ✓

f)



$$dA(\chi, P) = d\chi\, dP = \left\| \begin{matrix} 0 & \omega \\ \frac{1}{\omega} & 0 \end{matrix} \right\| dE\, dt = dE\, dt$$

$\Rightarrow$ Fläche im Phasenraum $A = \Delta E \Delta t$

$\Rightarrow$ Unter kanonischen Transformationen bleibt die Fläche im Phasenraum erhalten.

6

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A3

a) Rücktransformation der Hamiltonfunktion $H(q_i, p_i, t)$ mit $\dot{q}_i$ als "neuen" freien Variablen:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i - H(q_i, p_i, t) \qquad (s = \# \text{ Freiheitsgrade})$$

Betrachte totales Differential:

$$dL = \sum_{i=1}^{s} \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i \right) - dH(q_i, p_i, t)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i \right) - \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) - \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Jetzt nutzen wir die Hamiltonschen Bewegungsgln.:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$$

$$\Rightarrow dL = \sum_i \left(p_i d\dot{q}_i + \underline{\dot{q}_i dp_i} + \dot{p}_i dq_i - \underline{\dot{q}_i dp_i} \right) - \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$= \sum_i \left(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Wir können jedoch ebenso direkt eine Differentialform für $dL(q_i, \dot{q}_i, t)$ schreiben:

$$dL = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$\Rightarrow$ Der Vergleich zeigt: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i \; , \; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d p_i}{dt} = \dot{p}_i$

also: $$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Außerdem zeigt der Vergleich: $\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t}$