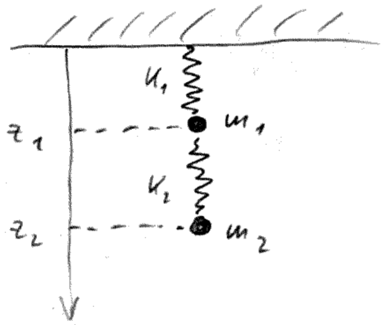
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

$\boxed{\text{Blatt 12}}$

A2

a) $U = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2 + \frac{k_1}{2} z_1^2 + \frac{k_2}{2}(z_2 - z_1)^2$



Ruhelage $\vec{z}_R$ im Minimum von U:

(1): $\left.\frac{\partial U}{\partial z_1}\right|_{\vec{z}=\vec{z}_R} \overset{!}{=} 0 = -m_1 g + k_1 z_1^R - k_2 (z_2^R - z_1^R)$

(2): $\left.\frac{\partial U}{\partial z_2}\right|_{\vec{z}=\vec{z}_R} \overset{!}{=} 0 = -m_2 g + k_2 (z_2^R - z_1^R)$

$\Rightarrow$ (1)+(2): $g(m_1+m_2) = k_1 z_1^R \Rightarrow \underline{\underline{z_1^R = \frac{g(m_1+m_2)}{k_1}}}$

$\Rightarrow$ (2): $m_2 g = k_2 z_2^R - \frac{g(m_1+m_2)k_2}{k_1} \Rightarrow \underline{\underline{z_2^R = \frac{g(m_1+m_2)}{k_1} + g\frac{m_2}{k_2}}}$

$\rightarrow$ neue Koordinaten: Auslenkung aus Ruhelage $\vec{q}(t)$

$z_i(t) = z_i^R + q_i(t)$

$\Rightarrow U = -m_1 g (z_1^R + q_1) - m_2 g (z_2^R + q_2) + \frac{k_1}{2}(z_1^R + q_1)^2 + \frac{k_2}{2}\left[(z_2^R - z_1^R) + (q_2 - q_1)\right]^2$

$= \underbrace{-m_1 g z_1^R - m_2 g z_2^R + \frac{k_1}{2}(z_1^R)^2 + \frac{k_2}{2}(z_2^R - z_1^R)^2}_{= U_0} + \frac{k_1}{2} q_1^2 + \frac{k_2}{2}(q_2 - q_1)^2$

$+ q_1 \big(\underbrace{-m_1 g + k_1 z_1^R + k_2(z_2^R - z_1^R)}_{=0}\big) + q_2 \underbrace{\big(-m_2 g + k_2 (\underbrace{z_2^R - z_1}_{= g\frac{m_2}{k_2}})\big)}_{=0}$

$= U_0 + \frac{k_1}{2} q_1^2 + \frac{k_2}{2}(q_2 - q_1)^2$

$\Rightarrow L = \frac{m_1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{q}_2^2 - U_0 - \frac{k_1}{2} q_1^2 - \frac{k_2}{2}(q_1^2 - 2 q_1 q_2 + q_2^2)$

$= \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \dot{\vec{q}} - \frac{1}{2}\vec{q}^T \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \vec{q} - \underbrace{U_0 \cdot \mathbb{1}}_{= \bar{U}_0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^T M \dot{\vec{q}} - \frac{1}{2}\vec{q}^T K \vec{q} - \bar{U}_0}}$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

$\boxed{\text{A2F}}$

b) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left[\tfrac{1}{2} M_{kl}\,\dot q_k \dot q_l + \ldots\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}M_{kl}\left(\dot q_l \delta_{ki} + \dot q_k \delta_{li}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}M_{il}\dot q_l + \underbrace{\tfrac{1}{2}M_{ki}\dot q_k}_{=M_{il}\dot q_l}\right] = M_{il}\ddot q_l = (M\ddot{\vec q})_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left[-\tfrac{1}{2}K_{mn}q_m q_n\right] = -K_{im}q_m = -(K\vec q)_i$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M\ddot{\vec q} = -K\vec q}} \quad \text{oder} \quad \ddot{\vec q} = -M^{-1}K\vec q \quad \text{mit } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/m_1 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{pmatrix}$$

Jetzt: $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = 3k$, $k_2 = 2k$

$$\Rightarrow \ddot{\vec q} = -\frac{k}{m}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\vec q = -\frac{k}{m}A\vec q$$

Lösungsansatz: $\vec q^{(j)}(t) = \alpha_j \sin(\omega_j t + \varphi_j)\,\vec v^{(j)}$

Eigenwert   Eigenvektor von A

Eigenwerte: $$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-6) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_1 = \sqrt{\tfrac{k}{m}}}}, \quad \underline{\underline{\omega_2 = \sqrt{6\tfrac{k}{m}}}}$$

Eigenvektoren: $$\vec v_1: \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\vec v_1 \overset{!}{=} \vec 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec v_1 = \vec 0 \Rightarrow \underline{\underline{\vec v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

$$\vec v_2: \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\vec v_2 \overset{!}{=} \vec 0 \Rightarrow \underline{\underline{\vec v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

$\Rightarrow$ allg. Lösung:

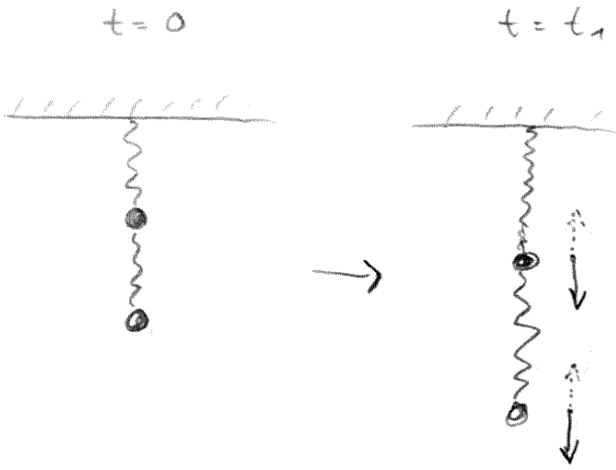
$$\vec q(t) = \alpha_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

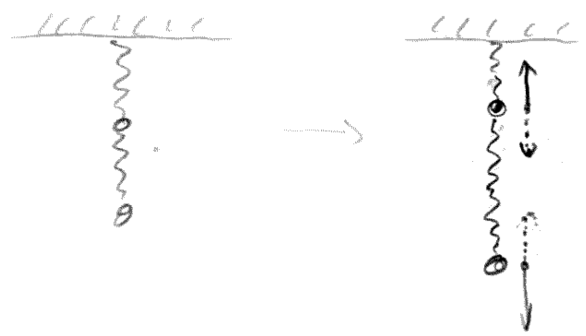
76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A2F

c)



$\vec{\Phi}^{(1)}(t)$: Schwingung in gleiche Richtung mit $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$



$\vec{\Phi}^{(2)}(t)$: gegenläufige, schnellere Schwingung mit $\omega_2 = \sqrt{6}\,\omega_1 > \omega_1$.

→ siehe auch Animation in Mathematica-Datei.

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A3

a) $L_j = \varepsilon_{jlm} x_l p_m$

$$\to \{x_i, L_j\} = \varepsilon_{jlm} \{x_i, x_l p_m\} = \varepsilon_{jlm} \left(\underbrace{\{x_i, x_l\}}_{=0} p_m + \underbrace{\{x_i, p_m\}}_{=\delta_{im}} x_l \right)$$

$$= \varepsilon_{jlm} \delta_{im} x_l = \varepsilon_{jli} x_l = \varepsilon_{jki} x_k = \underline{\underline{\varepsilon_{ijk} x_k}}$$

$$\{p_i, L_j\} = \varepsilon_{jlm} \{p_i, x_l p_m\} = \varepsilon_{jlm} \underbrace{\{p_i, x_l\}}_{=-\delta_{il}} p_m + 0$$

$$= -\varepsilon_{jlm} p_m \delta_{il} = -\varepsilon_{jik} p_k = \underline{\underline{\varepsilon_{ijk} p_k}}$$

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ilm} \{x_l p_m, L_j\} = \varepsilon_{ilm} \left(\{x_l, L_j\} p_m + \{p_m, L_j\} x_l \right)$$

$$= \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{ljk} x_k p_m + \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{mjk} p_k x_l$$ tauschen (umbenennen)

$$= (\varepsilon_{iml} \varepsilon_{mjk} + \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{mjl}) x_k p_l$$

$$= (\varepsilon_{lim} \varepsilon_{jkm} + \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jlm}) x_k p_l$$

$$= (\delta_{jl} \delta_{ik} - \delta_{kl} \delta_{ij} + \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}) x_k p_l$$

$$= (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) x_k p_l = \varepsilon_{ijm} \underbrace{\varepsilon_{klm} x_k p_l}_{= L_m} = \underline{\underline{\varepsilon_{ijk} L_k}}$$

5

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A3 F)

b) $\{L_j, \vec{p}^2\} = \{L_j, p_i p_i\}$

$= 2\{L_j, p_i\}p_i = -2\{p_i, L_j\}p_i = -2\varepsilon_{ijk} p_k p_i$

$= 2\varepsilon_{ikj} p_i p_k = 2(\vec{p}\times\vec{p})_j = \underline{\underline{0}}$

$\{L_i, \vec{L}^2\} = \{L_i, L_j L_j\} = 2\{L_i, L_j\}L_j = 2\varepsilon_{ijk} L_k L_j$

$= 2(\vec{L}\times\vec{L})_i = \underline{\underline{0}}$

c) Eine physikalische Größe $F(\vec{x}, \vec{p}, t)$ ist erhalten, wenn

$\{H, F\} = \frac{\partial F}{\partial t}$, also hier $\{H, f\} = \{H, g\} = 0$

Hamilton-Funktion

Jacobi-Identität: $\{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{H, \{f, g\}\} = 0$

$\Rightarrow \{H, \{f, g\}\} = 0$ q.e.d.

Also ist $\{f, g\}$ auch eine Erhaltungsgröße.

d) i) $\{p_x, H\} = 0$, $\{L_z, H\} = 0 \Rightarrow \{\{p_x, L_z\}, H\} = 0$

also ist $\{p_x, L_z\} = \varepsilon_{13k} p_k = -p_y$ erhalten.

ii) $\{L_x, H\} = 0$, $\{L_y, H\} = 0$

$\Rightarrow \{\{L_x, L_y\}, H\} = 0$, d.h. $\{L_x, L_y\} = \varepsilon_{12k} L_k = \underline{\underline{L_z}}$ ist erhalten

und damit auch $\{\vec{L}^2, H\} = 2\{L_k, H\}L_k = 0$, also ist

$\vec{L}^2$ ebenfalls erhalten.

⑥

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Kaiserstraße 12, Physikhochhaus

76128 KARLSRUHE,
Postfach 6380
Tel. 07 21 / 6 08 20 81
07 21 / 6 08 35 53

A4)

a) Phasentransformation kanonisch

$\Leftrightarrow \{q,p\}_{Q,P} = 1$

hier: $q(Q,P,t) = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\left[Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right]$ (1)

$p(Q,P,t) = \sqrt{m\omega}\left[-Q\sin(\Omega t) + P\cos(\Omega t)\right]$ (2)

$\Rightarrow \{q,p\} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \cos^2(\Omega t) + \sin^2(\Omega t) = 1$

b) Bestimme $F_1(q,Q,t)$, so dass $p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$, $P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$. Dazu brauchen wir also zunächst $p(q,Q,t)$ und $P(q,Q,t)$:

aus (1): $P(q,Q,t) = \frac{1}{\sin\Omega t}\left[\sqrt{m\omega}\, q - Q\cos\Omega t\right] \stackrel{!}{=} -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$ (*)

Bemerke, dass sich (1), (2) schreiben lassen als:

$$\begin{pmatrix}\sqrt{m\omega}\, q \\ \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q \\ P\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}Q \\ P\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{m\omega}\, q \\ \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Q = q\sqrt{m\omega}\cos(\Omega t) - \frac{p}{\sqrt{m\omega}}\sin(\Omega t)$

$\Rightarrow p(Q,q,t) = \frac{\sqrt{m\omega}}{\sin(\Omega t)}\left[q\sqrt{m\omega}\cos(\Omega t) - Q\right] \stackrel{!}{=} \frac{\partial F_1}{\partial q}$

also ist $F_1(q,Q,t) = \frac{\sqrt{m\omega}}{\sin(\Omega t)}\left[\frac{q^2}{2}\sqrt{m\omega}\cos(\Omega t) - Qq\right] + f_1(Q,t)$

und (*): $F_1(q,Q,t) = \frac{\sqrt{m\omega}}{\sin(\Omega t)}\left[\frac{Q^2}{2}\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\cos(\Omega t) - Qq\right] + f_2(q,t)$

zusammen: $F_1(q,Q,t) = \frac{\sqrt{m\omega}}{\sin(\Omega t)}\left[\frac{1}{2}\left(q^2\sqrt{m\omega} + \frac{Q^2}{\sqrt{m\omega}}\right)\cos(\Omega t) - Qq\right]$

A4F

c) $\bar{H}(Q,P,t) = H(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$

$$\rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\sqrt{m\omega}}{2}\frac{\Omega\cdot\cos(\Omega t)}{\sin^2(\Omega t)}\left[\left(q^2\sqrt{m\omega}+\frac{Q^2}{\sqrt{m\omega}}\right)\cos(\Omega t) - 2Qq\right] + \frac{\sqrt{m\omega}\,\Omega}{2\cdot\sin(\Omega t)}\left[-\left(q^2\sqrt{m\omega}+\frac{Q^2}{\sqrt{m\omega}}\right)\sin(\Omega t)\right.$$

$$= \frac{\Omega\sqrt{m\omega}}{2\sin^2(\Omega t)}\left[2Qq\cos(\Omega t) - \left(q^2\sqrt{m\omega}+\frac{Q^2}{\sqrt{m\omega}}\right)\right]$$

$q(Q,P,t) = \ldots$

$$= \frac{\Omega}{2\sin^2(\Omega t)}\Big\{2Q\cos(\Omega t)\left[Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right] - \left[\left(Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right)^2 + Q^2\right]\Big\}$$

$$= \frac{\Omega}{2\sin^2(\Omega t)}\Big\{\underbrace{2Q^2\cos^2\Omega t - Q^2\cos^2(\Omega t)}_{= Q^2(1-\sin^2(\Omega t))} - P^2\sin^2(\Omega t) - Q^2\Big\}$$

$$= -\frac{\Omega}{2}\left(P^2+Q^2\right)$$

$$H(q,p,t) = \frac{m\omega}{2m}\left(-Q\sin(\Omega t)+P\cos(\Omega t)\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2m\omega}\left(Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right)^2$$

$$+ b^2 q^4(Q,P,t) + \kappa\, q(Q,P,t)\cos(\Omega t)$$

$$= \frac{\omega}{2}\left(P^2+Q^2\right) + \frac{b^2}{m^2\omega^2}\left(Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right)^4$$

$$+ \frac{\kappa}{\sqrt{m\omega}}\left(Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right)\cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \bar{H}(Q,P,t) = \frac{\omega-\Omega}{2}\left(P^2+Q^2\right) + \frac{b^2}{m^2\omega^2}\left(Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right)^4$$

$$+ \frac{\kappa}{\sqrt{m\omega}}\left(Q\cos(\Omega t)+P\sin(\Omega t)\right)\cos(\Omega t)$$

A4F)

d) Abkürzung: $\cos(k\Omega t) = c_k, \quad \sin(k\Omega t) = s_k$

$$\to \left(Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right)^4 = \big(Q^2 \underbrace{c^2}_{=\frac{1}{2}(1+c_2)} + 2QP \underbrace{cs}_{=\frac{1}{2}s_2} + P^2 \underbrace{s^2}_{=\frac{1}{2}(1-c_2)}\big)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[Q^2 + P^2 + (Q^2-P^2)c_2 + 2QPs_2\right]^2$$

$$= \frac{1}{4}\Big[(Q^2+P^2)^2 + (Q^2-P^2)^2 \underbrace{c_2^2}_{\frac{1}{2}(1+c_4)} + 4Q^2P^2 \underbrace{s_2^2}_{=\frac{1}{2}(1-c_4)}\Big] + (\text{Terme mit} \geq 2\Omega t)$$

$$= \frac{1}{8}\left[2(Q^2+P^2)^2 + (Q^2-P^2)^2 + 4Q^2P^2\right] + (\text{Terme mit} \geq 2\Omega t)$$

$$= \frac{3}{8}(P^2+Q^2)^2 + (\text{Terme mit} \geq 2\Omega t)$$

außerdem:

$$\frac{\kappa}{\sqrt{m\omega}}\left(Q\cos(\Omega t) + P\sin(\Omega t)\right)\cos(\Omega t)$$

$$= \frac{\kappa}{2\sqrt{m\omega}}\left(\underline{Q} + Q\cos(2\Omega t) + P\sin(2\Omega t)\right)$$

$$\Rightarrow \bar{H} \simeq -\frac{\delta}{2}(P^2+Q^2) + \frac{3b^2}{8m^2\omega^2}(P^2+Q^2)^2 + \frac{\kappa}{2\sqrt{m\omega}}Q$$

Die Zeitabhängigkeit entfällt für die resonanten Terme.