Karlsruher Institut für Technologie

SoSe 2021

Klassische Theoretische Physik II

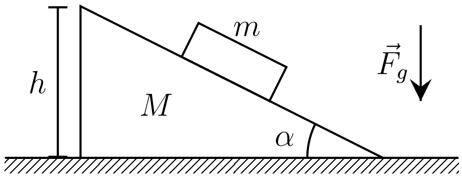
Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 1

Ausgabe: 16.04. – Abgabe: 23.04. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 26./27.04.

Aufgabe 1: Rutschender Keil — 8 Punkte

Ein Klotz der Masse m rutsche unter Einfluss der Gravitationskraft reibungsfrei auf einem Keil der Masse M mit Neigungswinkel α. Die hintere Kante des Keils hat die Höhe h. Der Keil kann sich wiederum reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene bewegen.



(a) Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen auf, indem Sie alle auftretenden Kräfte identifizieren und berücksichtigen, die auf den Klotz und den Keil wirken. Insbesondere üben natürlich der Klotz und der Keil gegenseitig Kräfte aufeinander aus.
Hinweis: Bedenken Sie, dass Kräfte an den Kontaktflächen wegen der fehlenden Reibung nur senkrecht zur Oberfläche übertragen werden können.

(b) Lösen Sie die so gewonnenen Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen, dass Klotz und Keil zum Zeitpunkt t_0 ruhen und dass der Klotz am oberen Ende des Keils startet. Wie lange braucht der Klotz bis er auf der Ebene ankommt?

Hinweis: Wir werden später zu diesem Beispiel zurückkehren und sehen, dass die Lösung mit den Methoden, die wir in der Vorlesung besprechen, wesentlich einfacher wird.

Aufgabe 2: Teilchen im Gravitationsfeld — 4 Punkte

Wir wollen eine einfache Situation betrachten, in der wir explizit mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Wirkung die Bahn eines Teilchens bestimmen können.
Dazu betrachten wir als konkretes Beispiel ein Teilchen der Masse m, das vertikal im konstanten Gravitationsfeld der Erde fällt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich das Teilchen auf der Höhe $z(0) = h$ befinden und zum Zeitpunkt $t = T$ soll es den Boden erreicht haben, $z(T) = 0$.
Um verschiedene Bahnen, die das Teilchen nehmen kann, zu parametrisieren, machen wir den Ansatz $z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$, wobei c_0, c_1 und c_2 drei unbekannte Konstanten sind, die verschiedene mögliche Bahnen des Teilchens parametrisieren.

(a) Einige Konstanten lassen sich durch die Randbedingungen festlegen: Bestimmen Sie die Konstanten c_0 und c_1 aus den Randbedingungen $z(0) = h$ und $z(T) = 0$.

(b) Geben Sie die Lagrangefunktion L an, die das System beschreibt.

(c) Berechnen Sie die Wirkung

$$S = \int_0^T \mathrm{d}t \; L(z(t), \dot{z}(t)) \,, \tag{2.1}$$

als Funktion von m, g, h, T und c_2.

(d) Benutzen Sie das Prinzip der kleinsten Wirkung, um zu zeigen, dass $c_2 = -g/2$ gilt. Stimmt das Resultat mit dem überein, was Sie erwartet haben?

(e) *(freiwillig)* Wiederholen Sie die Rechnung mit dem Ansatz $z(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$. Was erhalten Sie für c_3?

Aufgabe 3: Lagrangefunktion mit geschwindigkeitsabhängigem Potential

4 Punkte

Betrachten Sie eine Lagrangefunktion L, welche die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem geschwindigkeitsabhängigen Potential U beschreibt

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \,. \tag{3.1}$$

Das Potential schreiben wir als

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e\,\phi(\vec{r}, t) - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} \,, \tag{3.2}$$

wobei e und c zwei Naturkonstanten, $\phi(\vec{r}, t)$ ein elektrisches Potential und $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ein Vektorpotential sind.

(a) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.

(b) Verwenden Sie die Formel

$$\vec{\nabla}\,(\vec{x} \cdot \vec{y}\,) = (\vec{x} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{y} + (\vec{y} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{x} + \vec{y} \times (\vec{\nabla} \times \vec{x}\,) + \vec{x} \times (\vec{\nabla} \times \vec{y}\,) \,, \tag{3.3}$$

um den Term $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} (\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) \equiv \vec{\nabla}\,(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}})$ in den Euler-Lagrange-Gleichungen umzuschreiben.

(c) Zeigen Sie, dass man die Euler-Lagrange-Gleichungen in folgende Form umschreiben kann

$$m \ddot{\vec{r}} = -\frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e \vec{\nabla} \phi + \frac{e}{c}\, \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \,. \tag{3.4}$$

(d) In der Maxwellschen Theorie des Elektromagnetismus drückt man elektrische und magnetische Felder durch das elektrische Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$ aus. Es gilt

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \,, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \,. \tag{3.5}$$

Benutzen Sie diese Formeln, um die rechte Seite der Gleichung (3.4) durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auszudrücken. Können Sie die Kraft identifizieren, die auf der rechten Seite der Gleichung (3.4) auftaucht?