Karlsruher Institut für Technologie

SoSe 2021

Klassische Theoretische Physik II

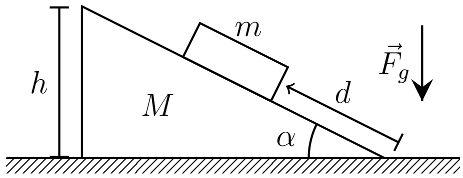
Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 2

Ausgabe: 23.04. – Abgabe: 30.04. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 03./04.05.

Aufgabe 1: Rutschender Keil, die Zweite — 7 Punkte

Betrachten Sie die gleiche Situation wie in Aufgabe 1 auf dem ersten Übungsblatt: Ein Block rutsche reibungsfrei auf einem Keil mit Neigungswinkel α, der sich selbst reibungsfrei auf einer Fläche bewegen kann. Wir wollen nun den Lagrangeformalismus nutzen, um zu sehen, wie sich damit die Lösung des Problems vereinfachen lässt.



(a) Konstruieren Sie die Lagrangefunktion, die dieses mechanische System beschreibt. Benutzen Sie dazu zunächst kartesische Koordinaten (x_M, y_M) und (x_m, y_m), um die Positionen des Blocks und des Keils auszudrücken.

(b) Die kartesischen Koordinaten sind nicht unabhängig. Welche geometrischen Zwangsbedingungen gelten für die Koordinaten? Sie können die Zwangsbedingungen hier direkt für die Koordinaten selbst (nicht für deren Ableitungen) hinschreiben. Nutzen Sie diese, um die Lagrangefunktion durch nur zwei unabhängige verallgemeinerte Koordinaten auszudrücken.
Hinweis: Als eine solche Koordinate bietet sich der Abstand d des Blocks von der unteren Kante des Keils an.

(c) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für den Block und den Keil.

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für die Randbedingungen, dass Block und Keil bei $t = t_0$ ruhen.

(e) Was erwarten Sie für $\ddot{x}_M$ und $\ddot{d}$ in den zwei Grenzfällen $\alpha \to 0$ und $\alpha \to \pi/2$? Stimmt Ihre Erwartung mit dem Ergebnis in (d) überein?

(f) Was passiert mit $\ddot{d}$, falls $m \ll M$ (für $\alpha \approx 30°$)?

(g) Berechnen Sie wieder die Zeit, die der Block braucht, um vom oberen Ende des Keils auf Höhe h startend die Ebene zu erreichen. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis der Aufgabe 1 des ersten Übungsblattes.

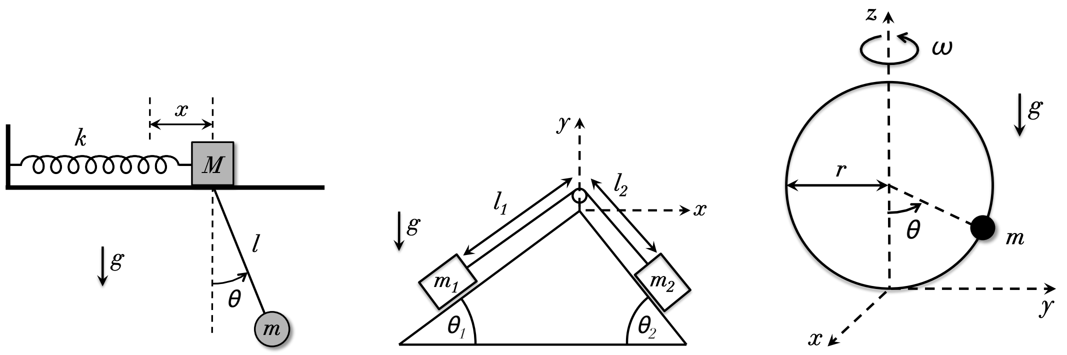
Aufgabe 2: Lagrangefunktion in verschiedenen Systemen — 6 Punkte

Bestimmen Sie für die folgenden Systeme jeweils die Lagrangefunktion L. Schreiben Sie $L(\vec{q}_i(t), \dot{\vec{q}}_i(t), t)$ dabei zunächst in Kartesischen Koordinaten auf. Bestimmen Sie dann die Zwangsbedingungen und schreiben Sie die Lagrangefunktion in Abhängigkeit der unabhängigen Koordinaten.

(a) Abb. 1(a): Eine Masse M bewegt sich reibungsfrei auf einer waagerechten Ebene und ist dabei an einer Feder mit Federkonstante k und Auslenkung x befestigt. An der Masse M ist ein Pendel mit Masse m und Länge l aufgehängt. Die gesamte Bewegung findet in einer zweidimensionalen Ebene statt.

(b) Abb. 1(b): Zwei Massen m_1 und m_2 bewegen sich unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einem Keil. Sie sind dabei durch ein masseloses Seil der Länge $l = l_1 + l_2$ verbunden. Die Winkel θ_1 und θ_2 des Keils sind fest gegeben.

(c) Abb. 1(c): Eine Perle mit Masse m gleitet reibungsfrei entlang eines kreisförmig gebogenen Drahtes mit Radius r. Der Draht befindet sich in einer Ebene, welche die z-Achse enthält und um dieselbe mit konstanter Kreisfrequenz ω rotiert.

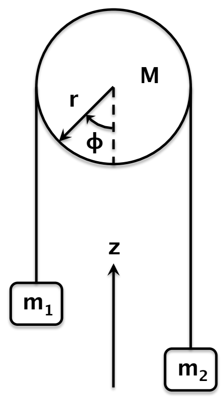


(a) (b) (c)

Abbildung 1: Drei verschiedene Systeme.

Aufgabe 3: Atwoodsche Fallmaschine **7 Punkte**

Die Atwoodsche Fallmaschine besteht aus zwei Lasten mit den Massen m_1 und m_2, die durch ein massenloses Seil der Länge ℓ verbunden sind, das eine Umlenkrolle mit Radius r und Masse M umläuft. Wenn eine der Massen sich nach unten bewegt, zieht sie die andere Masse nach oben. Die Umlenkrolle rotiert dann genau so, dass das Seil nicht rutscht. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Methode der Lagrange-Multiplikatoren zu üben.



(a) Die kinetische Energie der Umlenkrolle ist gegeben durch

$$T_{\text{Rolle}} = \tfrac{1}{4} M r^2 \omega^2 \,, \tag{3.1}$$

wobei $\omega = \dot{\phi}$ die Winkelfrequenz ist. (Diese Beziehung wird später in der Vorlesung hergeleitet.) Zeigen Sie, dass die Abrollbedingung impliziert, dass $\omega = \dot{z}_1/r$ gilt, wobei z_1 die vertikale Position der Masse m_1 ist.

(b) Konstruieren Sie die Lagrangefunktion $L(z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2)$, wobei z_2 die vertikale Position der Masse m_2 ist. (Der Mittelpunkt der Umlenkrolle bleibt fest.)

(c) Drücken Sie die Zwangsbedingung, dass das Seil die feste Länge ℓ hat, in der Form $f(z_1, z_2) = 0$ aus.

(d) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für $L_{\mathrm{tot}} = L(z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2) + \lambda f(z_1, z_2)$.

(e) Eliminieren Sie den Lagrange-Multiplikator λ in den Euler-Lagrange-Gleichungen und verwenden Sie die Zwangsbedingung $f(z_1, z_2) = 0$, um die Beschleunigung

$$\ddot{z}_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + M/2}\,, \tag{3.2}$$

der Masse m_1 herzuleiten.

(f) Die auf die Masse m_2 wirkende Gesamtkraft ist die Vektorsumme der Spannung des Seils (nach oben) und der Schwerkraft (nach unten). Berechnen Sie die Spannung des an der Masse m_2 befestigten Seils.

(g) Können Sie eine physikalische Interpretation des Lagrange-Multiplikators λ angeben?