

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

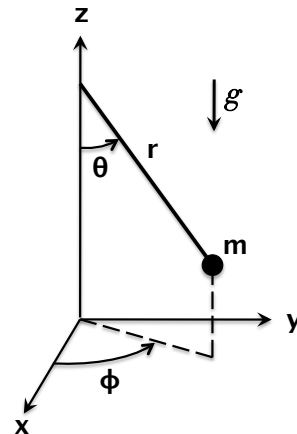
Übungsblatt 3

Ausgabe: 30.04. – Abgabe: 07.05. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 10./11.05.

Aufgabe 1: Kugelpendel

5 Punkte

Ein Kugelpendel besteht aus einer masselosen Stange der Länge r , die an einer Seite an einem festen Punkt angebracht ist, und an der auf der anderen Seite eine Masse m befestigt ist. Das Pendel kann sich unter der Einfluss der Schwerkraft frei in zwei Richtungen um den festen Aufhängepunkt bewegen. Die Position des Pendels lässt sich deshalb mit zwei Kugelkoordinaten (θ, ϕ) eindeutig beschreiben.



- Konstruieren Sie die Lagrangefunktion des Systems.
- Die Lagrangefunktion ist nicht explizit zeitabhängig. Finden Sie die einfachste Wahl der X und Ψ_i , sodass die Lagrangefunktion unter der dazu gehörigen infinitesimalen Transformation

$$t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t), \quad q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t), \quad (1.1)$$

invariant bleibt, wobei $\epsilon \ll 1$ gelte. Berechnen Sie den Ausdruck für die Erhaltungsgröße

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Psi_i - X \dot{q}_i) + L X \quad (1.2)$$

und beschreiben Sie deren physikalische Interpretation.

- Die Lagrangefunktion ist außerdem unabhängig von der Koordinate ϕ . Wie lautet die entsprechende Symmetrietransformation? Berechnen Sie die entsprechende Erhaltungsgröße mit Hilfe von Gleichung (1.2). Was ist die physikalische Interpretation dieser Erhaltungsgröße?
- Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Welche Gleichung führt zur Erhaltungsgröße in Frage (c)?
- Nehmen Sie an, dass $\theta = \theta_0$ konstant sei. Zeigen Sie, dass das Pendel in diesem Fall mit der konstanten Winkelfrequenz

$$\dot{\phi}_0 = \sqrt{\frac{g}{r \cos \theta_0}}, \quad (1.3)$$

um die vertikale Achse rotiert.

Aufgabe 2: Erhaltungsgrößen in verschiedenen Potentials 6 Punkte

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m und Ortsvektor $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$, dessen Bewegung durch die Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}, t)$ beschrieben wird. Wir möchten verschiedene Potentiale $U(\vec{r}, t)$ betrachten, um zu üben, wie man Symmetrietransformationen der Wirkung findet und die entsprechenden Erhaltungsgrößen bestimmt.

- (a) Es sei $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r} - \vec{v}_0 t)$, wobei $\vec{v}_0$ ein konstanter Vektor ist. Welche infinitesimale Transformation der Form

$$t' = t + \epsilon X(\{r_j\}, t), \quad r'_i = r_i + \epsilon \Psi_i(\{r_j\}, t), \quad (2.1)$$

lässt die Lagrangefunktion (und damit die Wirkung) invariant? Zeigen Sie, dass die zugehörige Erhaltungsgröße durch

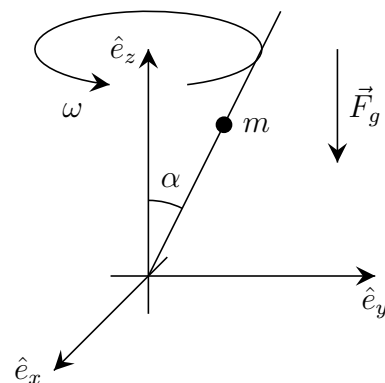
$$E(t) - \vec{p} \cdot \vec{v}_0 = \text{const}, \quad (2.2)$$

gegeben ist, wobei die Energie $E(t) = T + U = \frac{1}{2}m\dot{r}_i^2 + U$ nicht konstant ist.

- (b) Es sei $U(\vec{r}, t) = -F_0 r_3$, wobei F_0 eine konstante Kraft ist. Da die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist $t' = t + \epsilon$ eine Symmetrie und damit die Energie erhalten. Finden Sie weitere Symmetrietransformationen in der Form von Gleichung (2.1). Zeigen Sie, dass dies zur Impulserhaltung in der r_1, r_2 -Ebene und zur Drehimpulserhaltung um die r_3 -Achse führt. Können Sie dieses Problem auf das Potential $U(\vec{r}, t) = -\vec{F}_0 \cdot \vec{r}$ verallgemeinern?
- (c) Es sei $U(\vec{r}, t) = e\phi(\vec{r}, t) - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}$, für ein Teilchen mit Ladung e . Wählen Sie die Potentiale als $\phi = 0$ und $\vec{A} = B_0 r_1 \hat{e}_2$, was einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \hat{e}_3$ entspricht. Geben Sie alle Symmetrietransformationen der Lagrangefunktion an, sowie die zugehörigen Erhaltungsgrößen in Abhängigkeit von r_i und $\dot{r}_i$.

Aufgabe 3: Gleitende Perle auf schrägem Draht5 Punkte

Eine Perle, idealisiert als Massenpunkt der Masse m , bewegt sich reibungsfrei auf einem mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und konstantem Neigungswinkel α um die z -Achse rotierenden Draht (siehe Skizze). Das System befindet sich im homogenen Gravitationsfeld der Erde $\vec{F}_g = -mg\hat{e}_z$.



- (a) Konstruieren Sie die Lagrangefunktion für dieses System mit Hilfe geeigneter verallgemeinerter Koordinaten.
- (b) Berechnen Sie die Erhaltungsgröße, die daraus folgt, dass die Lagrangefunktion nicht explizit zeitabhängig ist.

- (c) Beschreibt die Erhaltungsgröße in Frage (b) die Energie der Perle? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie sie für die Anfangsbedingungen $r(t=0) = r_0 > 0$ und $\dot{r}(t=0) = 0$. Dabei sei $r(t)$ der Abstand der Perle zum Ursprung.
- (e) Wie verhält sich das System für sehr kleine bzw. sehr große Neigungswinkel α (also $\alpha \approx 0$ und $\alpha \approx \frac{\pi}{2}$)? Welche Rolle spielt die Winkelgeschwindigkeit ω ? Bei welcher Winkelgeschwindigkeit findet der Übergang vom einen zum anderen Verhalten statt?

Aufgabe 4: Snelliussches Brechungsgesetz

6 Punkte

Das Prinzip von Fermat besagt, dass Licht sich auf der Bahn ausbreitet, auf dem es die kürzeste Zeit zwischen zwei Punkten benötigt. Ziel der Aufgabe ist es, aus diesem Prinzip das Snelliussche Brechungsgesetz herzuleiten.

- (a) Zeigen Sie, dass die Zeit, die das Licht braucht, um in einer Ebene in einem Medium mit Brechungsindex $n(x, y)$ vom Punkt P mit Koordinaten (x_1, y_1) zum Punkt Q mit Koordinaten (x_2, y_2) zu gelangen, durch

$$T[y(x)] = \int_P^Q dt = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y(x), y'(x), x), \quad (4.1)$$

gegeben ist, wobei

$$F(y(x), y'(x), x) = \frac{n(x, y)}{c} \sqrt{1 + y'(x)^2}, \quad (4.2)$$

ist.¹

- (b) Stellen Sie eine Analogie zwischen dem Fermatschen Prinzip und dem Prinzip der kleinsten Wirkung her, um für die Bahn $y(x)$, die $T[y(x)]$ minimiert, die entsprechende Euler-Lagrange-Gleichung zu erhalten. Zeigen Sie, dass diese mit F aus Gleichung (4.2)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'(x) n(x, y)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) = \frac{\partial n(x, y)}{\partial y} \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (4.3)$$

impliziert.

- (c) Zeigen Sie, dass Licht sich in einem Bereich mit konstanten $n(x, y) = n_0$ entlang einer Geraden bewegt.
- (d) Betrachten Sie nun die Situation in Abb. 1, wobei

$$n(x, y) = n(x) = \begin{cases} n_1 & \text{für } x < 0 \\ n_2 & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

¹Die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium ist durch $v = c/n$ gegeben.

mit n_1 und n_2 unterschiedliche Konstanten. Benutzen Sie die Lösung aus Frage (c) in beiden Bereichen und verwenden Sie Gleichung (4.3), um das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (4.5)$$

herzuleiten.

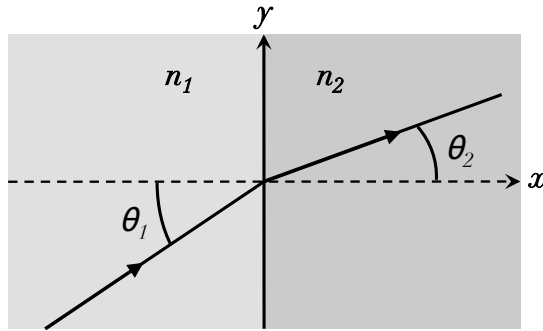


Abbildung 1: Lichtbrechung an der Grenzfläche zwischen zwei Bereichen mit unterschiedlichen, konstanten Brechungsindizes.

</>
KEEP CALM



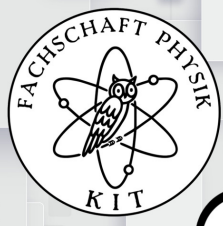
IT'S NOT
ROCKET SCIENCE

WAS? Lego mit Atomen - Dr. Willke erklärt wie man auf kleinster Nanoskala arbeitet

WANN? Mittwoch, 05.05. 18:00 Uhr

WO? Zoom, siehe: fachschaft.physik.kit.edu

eine Veranstaltung des Mentorenprogramms



Präsidium im Gespräch

Physik Neubauten & Lehre am Campus Nord

Di 4. Mai 18:00

Wann sind die Neubauten fertig?

Was ist mit Praktika?

Was passiert mit dem Flachbau?

Studieren am Campus Nord?



Zoom

mit

Michael Ganß (Vizepräsident für Wirtschaft und Finanzen)

Prof. Dr. Alexander Wanner (Vizepräsident für Lehre)