Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 4

Ausgabe: 07.05. – Abgabe: 14.05. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 17./18.05.

Aufgabe 1: Teilchen im Rotationsparaboloid — 9 Punkte

Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass man mit Zwangsbedingungen auf verschiedene Weise umgehen kann, wenn diese in der Form $f_i(q_1, \ldots, q_N, t) = 0$, $i \in \{1, \ldots, k\}$ gegeben sind. Eine Möglichkeit ist, die Zwangsbedingungen zuerst nach den verallgemeinerten Koordinaten aufzulösen und dann die abhängigen Größen in der Lagrangefunktion zu eliminieren, bevor man die Euler-Lagrange-Gleichungen aufstellt. Dies nennt man den *Lagrangeformalismus zweiter Art*. Eine andere Möglichkeit ist, Lagrangemultiplikatoren einzuführen, eine erweiterte Lagrangefunktion $L_{\text{tot}} = L + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ hinzuschreiben und die Euler-Lagrange-Gleichungen für L_{tot} aufzustellen. Dies nennt man den *Lagrangeformalismus erster Art*. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, erhalten wir damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial q_i} \qquad \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\,, \tag{1.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial \dot{\lambda}_i} = \frac{\partial L_{\text{tot}}}{\partial \lambda_i} \qquad \Leftrightarrow 0 = f_i\,. \tag{1.2}$$

Die zusätzlichen Terme $Z_{i,j} = \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$ auf der rechten Seite der ersten Gleichung sind die Komponenten der Zwangskräfte, die aus den Zwangsbedingungen resultieren.

Als Beispiel wollen wir nun ein Teilchen der Masse m betrachten. Es bewege sich sich reibungsfrei unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes der Erde ($\vec{F}_g = -mg\hat{e}_z$) auf der Innenfläche eines Rotationsparaboloids, die durch die Gleichung $z = (x^2 + y^2)/a$ beschrieben wird. Benutzen Sie zweckmäßigerweise Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) mit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\tan\varphi = y/x$ zur Parametrisierung der Position des Teilchens.

(a) Zeichnen Sie eine Skizze des Systems.

(b) Benutzen Sie den Lagrangeformalismus erster Art, um die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Leiten Sie daraus durch geeignete Kombination der Gleichungen die Bewegungsgleichung für $\rho(t)$ her, die nur noch diese Variable und ihre Ableitungen als zeitabhängige Größen enthält. Geben Sie zudem die beiden Gleichungen an, die $\varphi(t)$ und $z(t)$ als Funktionen von $\rho(t)$ bestimmen. Wie lauten die Zwangskräfte, die auf das Teilchen wirken? *Hinweis:* Eine der Euler-Lagrange-Gleichungen liefert Ihnen eine Erhaltungsgröße. Nutzen Sie diese, um eine Variable zu eliminieren. (Sie brauchen hierfür in diesem Fall nicht das Noether-Theorem).

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die gleiche Koordinatenwahl mit dem Lagrangeformalismus zweiter Art auf.

(d) Zeigen Sie, dass das Teilchen in der Ebene, die durch die Bedingung $z = h$ gegeben ist, eine Kreisbahn auf der Innenseite des Paraboloids durchläuft, wenn es in horizontaler Richtung mit der Winkelgeschwindigkeit $|\omega| = \sqrt{2g/a}$ losgeschickt wird. *Hinweis:* Sie müssen nur nachprüfen, dass diese Bahn eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist.

(e) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus (b) die Zwangskräfte, die auf der Bahn aus (d) auf das Teilchen wirken.

Aufgabe 2: Verallgemeinerung des Noether-Theorems $\boxed{\textbf{4 Punkte}}$

In der Vorlesung wurde ein allgemeiner Ausdruck für Erhaltungsgrößen hergeleitet, der aus der Invarianz der Wirkung unter infinitesimalen Transformationen der Form

$$q_i' = q_i + \epsilon \Psi_i(q,t)\,, \qquad\qquad t' = t + \epsilon X(q,t) \tag{2.1}$$

folgt, wobei wir die Abkürzung $q = \{q_j\}$ nutzen. Hier betrachten wir nun den Fall, in dem sich die Lagrangefunktion unter diesen Transformationen ändert, aber nur um eine totale Zeitableitung:

$$L(q, \mathrm{d}q/\mathrm{d}t, t) = L(q', \mathrm{d}q'/\mathrm{d}t', t') + \epsilon \frac{\mathrm{d}f(q',t')}{\mathrm{d}t'}\,, \tag{2.2}$$

wobei f eine Funktion der Koordinaten und der Zeit ist.

(a) Argumentieren Sie, dass der zusätzliche Term $\epsilon \mathrm{d}f(q',t')/\mathrm{d}t'$ die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht ändert.

(b) Zeigen Sie, dass die Erhaltungsgröße in diesem Fall durch

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\Psi_i - X\dot{q}_i) + L\,X + f(q,t) \tag{2.3}$$

gegeben ist. *Hinweis:* Folgen Sie den gleichen Schritten wie in der Vorlesung.

Aufgabe 3: Galileitransformationen $\boxed{\textbf{5 Punkte}}$

Betrachten wir eine (infinitesimale) Galileitransformation $q_i \to q_i + \epsilon w_i t$.

(a) Was ist die physikalische Interpretation dieser Transformation und was stellen die w_i dar?

(b) Leiten Sie eine Formel für die Erhaltungsgröße I eines freien Teilchens mit Masse m her, die aus der Invarianz der Wirkung unter Galileitransformationen folgt. *Hinweis*: Bestimmen Sie Ψ_i, X und f in Gleichung (2.3).

(c) Zeigen Sie, dass dieses die Invarianz von

$$\chi_i = mq_i - p_i t\,, \tag{3.1}$$

für $i \in \{1, 2, 3\}$ impliziert ($p_i = m\dot{q}_i$ bezeichnet den Impuls).

(d) Für ein freies Teilchen sind die Energie (eine Gleichung), der Impuls (drei Gleichungen) und den Drehimpuls (drei Gleichungen) erhalten. Zusätzlich sind die drei Größen in Gleichung (3.1) erhalten. Insgesamt gibt es also zehn Erhaltungsgrößen, welche die Bewegung des Teilchens charakterisieren. Allerdings ist die Bewegung eines Teilchens in drei Dimensionen durch sechs Bedingungen (z.B. die Position und Geschwindigkeit bei $t = 0$) komplett festgelegt. Warum ist das System durch die zehn Erhaltungsgrößen nicht überbestimmt?

(e) Betrachten Sie nun eine allgemeinere Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} f(\dot{\vec{q}}^2)\,, \tag{3.2}$$

wobei f eine allgemeine, differenzierbare Funktion sein soll, die wie angegeben nur vom Betragsquadrat der Geschwindigkeit abhängt. Zeigen Sie, dass die Form von f vollständig durch die Forderung, dass die Wirkung invariant unter (infinitesimalen) Galileitransformationen sein soll, festgelegt wird.