Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 5

Ausgabe: 14.05. – Abgabe: 21.05. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 31.05./01.06.

Aufgabe 1: Ähnlichkeitstransformationen — 6 Punkte

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m und Position $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$, dessen Bewegung durch die Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}\,)$ beschrieben wird.

(a) Es sei $U(\lambda\,\vec{r}\,) = \lambda^{-2}\,U(\vec{r}\,)$. Finden Sie eine Ähnlichkeitstransformation der Koordinaten r_i und der Zeit t (sprich eine Skalierung mit einem Faktor λ), welche die Wirkung (aber nicht die Lagrangefunktion) invariant lässt.

(b) Im Gegensatz zu der in der Vorlesung diskutierten Situation ist hier die transformierte Wirkung S' nicht nur proportional, sondern tatsächlich identisch zur ursprünglichen Wirkung S. Daher liefert das Noether-Theorem eine Erhaltungsgröße. Schreiben Sie die Ähnlichkeitstransformation in infinitesimaler Form, also als

$$t' = t + \epsilon\, X(\{r_j\}, t)\,, \qquad r'_i = r_i + \epsilon\, \Psi_i(\{r_j\}, t)\,, \tag{1.1}$$

und zeigen Sie, dass die Erhaltungsgröße

$$\vec{p} \cdot \vec{r} - 2Et = \text{const} \tag{1.2}$$

lautet.

(c) Es sei nun $U(\vec{r}\,) = -k/r^2$, mit $k > 0$. Bestätigen Sie, dass dies einen Spezialfall von Frage (a) darstellt, sodass also Gleichung (1.2) gilt. Argumentieren Sie, dass der Drehimpuls $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ ebenfalls erhalten ist. Zeigen Sie, dass die dritte Erhaltungsgröße, die Energie, deswegen als

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^2} \tag{1.3}$$

geschrieben werden kann.

(d) Alle diese Erhaltungsgrößen sind nützlich, um die Bahnkurve relativ einfach zu bestimmen ohne Differentialgleichungen zu lösen. Kombinieren Sie Gleichungen (1.2) und (1.3), um die radiale Bewegungsbahn herzuleiten,

$$r(t) = \sqrt{\frac{(2Et + \text{const})^2 + M^2 - 2mk}{2mE}}\,. \tag{1.4}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\vec{p} \cdot \vec{r} = m r \dot{r}$ gilt.

Aufgabe 2: Mechanische Ähnlichkeit — 3 Punkte

Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich in einem homogenen Potential von Grad n,

$$U(\lambda x) = \lambda^n U(x)\,. \tag{2.1}$$

Im eindimensionalen Fall bedeutet das, dass $U(x) = U_0\, x^n$ ist. Nehmen Sie an, dass das Potential ein Minimum hat, d.h. $U_0 > 0$ und $n = 2, 4, 6, \ldots$, und dass die Energie des Teilchens größer als das Minimum U_0 ist. Dann oszilliert das Teilchen zwischen den zwei Wendepunkten $x_A(E)$ und $x_B(E)$ unter der Bedingung $E = U(x_{A,B})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Periode T der Oszillation proportional zu $E^{1/n-1/2}$ ist. *Hinweis:* Führen Sie eine geeignete Variablentransformation durch, ohne das Integral auszuführen.

(b) Verwenden Sie das Resultat der vorherigen Teilaufgabe, um die Aussage der mechanischen Ähnlichkeit

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1-n/2}\,, \tag{2.2}$$

zwischen zwei Umlaufbahnen mit Perioden T_i und Ausmaßen $L_i \sim (x_{A,B})_i$ herzuleiten.

Aufgabe 3: Bewegung in unterschiedlichen Potentialen — 3 Punkte

Beschreiben Sie qualitativ (endlich/unendlich, Umkehrpunkte) die Bewegung eines Teilchens in den unten stehenden Potentialen. Gehen Sie insbesondere darauf ein, was für mögliche Arten der Bewegung in Abhängigkeit der Energie des Teilchens auftreten. Im ersten Bild sind die zu betrachteten Energieniveaus eingezeichnet. Fertigen Sie für die zwei anderen Potentiale eine Skizze an und zeichnen Sie die relevanten Energieniveaus ein.

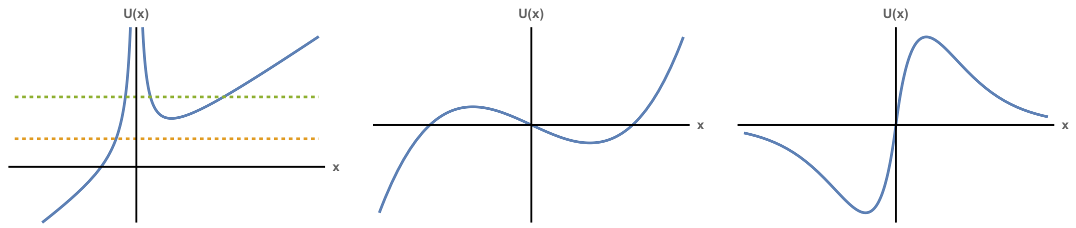

Abbildung 1: Verschiedene Potentiale

Aufgabe 4: Ursprung erreichen $\boxed{\textbf{6 Punkte}}$

Für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit Masse m kann die Zeit, die es benötigt, um von einem festgelegten Anfangspunkt mit Koordinate x_0 zu einem Endpunkt mit zeitabhängiger Koordinate $x(t)$ zu kommen, durch das Integral

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{E - U(x)}}\,, \tag{4.1}$$

geschrieben werden, wobei $x(t_0) = x_0$. In dieser Aufgabe wird die Energie E des Teilchens auf Null gesetzt, sowie $U(x) \leq 0$ angenommen. Außerdem wird die Koordinate x_0 des Startpunkts als positiv sowie die Anfangsgeschwindigkeit als negativ angenommen.

(a) Welches ist das korrekte Vorzeichen ($\pm$) in Gleichung (4.1) für die oben beschriebenen Anfangsbedingungen?

Betrachten Sie das Potential

$$U(x) = -C\,|x|\,, \tag{4.2}$$

wobei $|x|$ der Betrag von x und C eine positive Konstante ist.

(b) Skizzieren Sie das Potential $U(x)$. Zeichnen Sie in der Skizze die Koordinaten x_0 und $x(t)$ für eine Zeit $t > t_0$, so dass $x(t)$ immer noch positiv ist.

(c) Führen Sie das Integral in Gleichung (4.1) mit dem vorgegebenen $U(x)$ aus.

(d) Lösen Sie das Resultat aus der vorherigen Teilaufgabe nach $x(t)$ auf und drücken Sie es in Abhängigkeit von C, m, x_0, t_0 und t aus.

(e) Wie lange braucht das Teilchen, um den Ursprung $x(t) = 0$ zu erreichen?

(f) Wiederholen Sie die Teilaufgaben (b) – (e) für das Potential $U(x) = -C\,x^2$ mit $C > 0$.