Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 6

Ausgabe: 21.05. – Abgabe: 04.06. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 07./08.06.

Aufgabe 1: Dreidimensionaler harmonischer Oszillator $\boxed{\text{8 Punkte}}$

Betrachten Sie die dreidimensionale Verallgemeinerung des harmonischen Oszillators, bei dem zwei Teilchen der Massen m_1 und m_2 miteinander über das Potential $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \alpha(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$ wechselwirken.

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegung der zwei Teilchen in die Bewegung des Schwerpunkts (eines freien Teilchens der Masse m) und die Bewegungen eines Teilchens der Masse μ in einem Zentralpotential $U(\vec{r}) = U(r)$ zerlegt werden kann. Bestimmen Sie m und μ.

(b) Die Schwerpunktsbewegung ist nicht weiter interessant. Argumentieren Sie, dass die Bewegung des Teilchens im Potential $U(r)$ in einer Ebene stattfindet, sodass die Teilchenbahn durch die Polarkoordinaten r und φ beschrieben werden kann. Zeigen Sie außerdem, dass die Energie des Teilchens als

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \tag{1.1}$$

geschrieben werden kann. Bestimmen und skizzieren Sie $U_{\text{eff}}(r)$.

(c) Finden Sie das Minimum $U_{\text{eff,min}}$ des effektiven Potentials und bestimmen Sie die Wendepunkte r_A und r_B unter der Annahme, dass das Teilchen eine Energie $E > U_{\text{eff,min}}$ hat.

(d) Für die Geschwindigkeit des Teilchens lässt sich der Ausdruck

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{M}{\mu r^2} \tag{1.2}$$

schreiben, wobei M der Betrag des Drehimpulses ist. Zeigen Sie damit, dass für eine geeignete Wahl der Integrationskonstanten

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{\frac{M^2}{\mu r^2} - E}{\sqrt{E^2 - \frac{2\alpha M^2}{\mu}}}\right) \tag{1.3}$$

gilt. *Hinweis:* Verwenden Sie das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{az^2 + bz + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}}\arccos\left(-\frac{b + 2az}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) \tag{1.4}$$

und die Substitution $z = 1/r^2$.

(e) Berechnen Sie die Änderung des Winkels $\Delta\varphi$, die sich ergibt, wenn das Teilchen von $r = r_A$ nach $r = r_B$ pendelt. Bestimmen Sie daraus, ob die Bahn offen oder geschlossen ist.

(f) Invertieren Sie das Resultat in Gleichung (1.3), um die Bahn $r(\varphi)$ zu bestimmen. Welchem Wert von φ entspricht der minimale Radius $r = r_A$?

Aufgabe 2: Überwindung des Drehimpulses $\boxed{\textbf{9 Punkte}}$

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich im dreidimensionalen Potential

$$U(\vec{r}) = -\alpha r^{-n} \tag{2.1}$$

bewegt. Das Teilchen habe einen nicht-verschwindenden Drehimpuls $M \neq 0$.

(a) Was muss für α und n gelten, damit das Teilchen den Ursprung erreichen kann? Machen Sie eine Fallunterscheidung und skizzieren Sie das effektive Potential in jedem dieser Fälle. Wie groß muss die Gesamtenergie sein, damit ein Teilchen, das aus dem Unendlichen kommt, den Ursprung erreichen kann?

(b) Ist die Anzahl der Umläufe, bevor der Ursprung erreicht wird, in den Fällen aus (a), in denen der Ursprung erreichbar ist, jeweils endlich oder unendlich?

(c) Nehmen Sie an, dass die Bedingungen aus (a) erfüllt sind. Zeigen Sie, dass die Zeit, die benötigt wird, um den Ursprung zu erreichen, immer endlich ist, während die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit gegen unendlich gehen.

Hinweis: In (b) und (c) müssen Sie die auftretenden Integrale nicht exakt berechnen, sondern es reicht, das Verhalten für kleine r (Abstand zum Ursprung) zu diskutieren.