SoSe 2021

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 7

Ausgabe: 04.06. – Abgabe: 11.06. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 14./15.06.

Aufgabe 1: Periheldrehung — 10 Punkte

Eine der Vorhersagen von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie ist, dass Planetenbahnen keine stabilen Ellipsen sind, wie von Newton vorhergesagt. Stattdessen dreht sich ihr Perihel (der Bahnpunkt mit dem geringsten Abstand zur Sonne) langsam um die Sonne. Die korrekte Vorhersage dieses Effekts in der Merkurbahn war der erste Triumph der allgemeinen Relativitätstheorie und etablierte sie als Nachfolger der Newtonschen Gravitationstheorie. Der führende Effekt der relativistischen Korrekturen kann durch einen zusätzlichen Term im Gravitationspotential proportional zu r^{-2} modelliert werden. Das Potential ist dann durch

$$U(\vec{r}\,) = -\frac{k}{r} + \frac{C}{r^2} \tag{1.1}$$

gegeben, wobei k dieselbe Konstante wie in der Newtonschen Gravitationstheorie ist und C die relativistische Korrektur parametrisiert.

(a) Geben Sie die Lagrangefunktion für ein Objekt mit Masse m in diesem dreidimensionalen Potential an. Welche Erhaltungsgrößen gibt es? Erklären Sie, warum dadurch die Bewegung in einer zweidimensionalen Ebene stattfindet und natürlicherweise durch Polarkoordinaten r und φ beschrieben wird.

(b) Für ein Objekt in einem Zentralpotential, kann φ durch r als

$$\varphi = \int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{M^2} - \frac{2mU(r)}{M^2} - \frac{1}{r^2}}} \tag{1.2}$$

ausgedrückt werden, wobei M die Norm des Drehimpulses und E die Energie ist. Zeigen Sie, dass die Bahn durch

$$r = \frac{\rho(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos(\alpha\varphi)} \tag{1.3}$$

gegeben ist, wobei ρ, ϵ und α von E, M, m, k und C abhängen. Die Formel für α ist

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2mC}{M^2}}\,. \tag{1.4}$$

Wie lauten die Formeln für ρ und ϵ?

Hinweis: Folgen Sie den gleichen Schritten wie in der Herleitung der Keplerbahnen in der Vorlesung und benutzen Sie das Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{az^2 + bz + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arccos\left(-\frac{b + 2az}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right), \tag{1.5}$$

und die Substitution $z = 1/r$.

(c) Skizzieren Sie die Bahn für Werte von α nahe eins. Zeichnen Sie α, ρ und ϵ in der Skizze ein. Was ist der wesentliche Unterschied zwischen den Fällen $\alpha = 1$ und $\alpha \neq 1$?

(d) Nehmen Sie an, dass C viel kleiner als alle anderen Größen des Problems ist. Leiten Sie die Geschwindigkeit der Periheldrehung, das heißt die Änderung der Position des Winkels des Perihels nach jedem Bahnumlauf,

$$\delta\varphi \approx -2\pi \frac{mC}{M^2} \tag{1.6}$$

her.

(e) Einsteins Theorie sagt vorher, dass die Konstante C durch

$$C = -3\,\frac{G^2\, m\, m_\odot^2}{c^2} \tag{1.7}$$

gegeben ist, wobei G die Newtonsche Konstante, $m_\odot$ die Masse der Sonne und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Schreiben Sie die Geschwindigkeit der Periheldrehung zu

$$\delta\varphi \approx \frac{6\pi G m_\odot}{c^2(1 - \epsilon^2)\rho} \tag{1.8}$$

um. *Hinweis:* Hier können Sie die Newtonschen Formeln benutzen:

$$k = G\, m\, m_\odot\,, \qquad \rho = -\frac{G\, m\, m_\odot}{2E}\,, \qquad \epsilon \approx \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{mk^2}}\,. \tag{1.9}$$

(f) Der beobachtete Wert der Geschwindigkeit der Periheldrehung des Merkurs ist 5600 Bogensekunden pro Jahrhundert (eine Bogensekunde ist 1/3600 Grad), aber die größten Beiträge kommen aus Gravitationseffekten der anderen Planeten, die auch durch die Newtonsche Gravitationstheorie beschrieben werden. Wie groß ist der relativistische Beitrag an der Geschwindigkeit der Periheldrehung des Merkurs?
Hinweis: Für den Planeten Merkur gilt: $\epsilon = 0.206$, $\rho = 57.9 \times 10^9\,\mathrm{m}$, Bahnperiode $\tau = 88.0$ (Erd-)Tage, und $m = 3.30 \times 10^{23}\,\mathrm{kg}$. Zusätzlich $m_\odot = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ und $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Aufgabe 2: Der Runge-Lenz-Vektor **10 Punkte**

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass der Runge-Lenz-Vektor $\vec{A}$ im Kepler-Problem erhalten ist. Der Runge-Lenz-Vektor ist durch

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\hat{r} \tag{2.1}$$

gegeben, wobei $\vec{p}$ der Impuls, $\vec{L}$ der Drehimpuls, $k = GMm$ und $\hat{r} = \vec{r}/r$ der Einheitsvektor in Radialrichtung ist.

(a) Skizzieren Sie eine elliptische Bahn und zeichnen Sie die Richtung des Runge-Lenz-Vektors an verschiedenen Punkten entlang der Bahn ein.

(b) Wir führen den Winkel θ zwischen $\vec{A}$ und $\vec{r}$ ein, so dass $\vec{A} \cdot \vec{r} = |\vec{A}||\vec{r}| \cos\theta$ gilt. Setzen Sie diesen Ausdruck mit dem expliziten Ausdruck für $\vec{A} \cdot \vec{r}$ gleich, um die Formel

$$r = \frac{L^2}{mk + A\cos\theta} \tag{2.2}$$

herzuleiten, wobei $L = |\vec{L}|$ sei.

(c) Vergleichen Sie Gleichung (2.2) mit der Formel für eine elliptische Bahn,

$$r = \frac{(1-\epsilon^2)\rho}{1+\epsilon\cos\theta}\,, \tag{2.3}$$

um A durch die Exzentrizität ϵ auszudrücken.

(d) Bei Abweichungen von einem $1/r$ Potential ist der Runge-Lenz-Vektor nicht mehr erhalten. Zeigen Sie, dass die Zeitableitung des Runge-Lenz-Vektors für ein allgemeines Zentralpotential $U(r) = -\frac{k}{r} + \delta U(r)$ durch

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = f(r)\,\hat{r} \times \vec{L} \tag{2.4}$$

gegeben ist, wobei $f(r) = -\frac{\mathrm{d}\delta U(r)}{\mathrm{d}r}$ ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Vektoridentität $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (BAC-CAB-Regel).

(e) Benutzen Sie die Erhaltung des Drehimpulses, um die Zeitableitung als Winkelableitung auszudrücken und damit die Formel

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}\theta} = -f(r)mr^2\hat{L} \times \hat{r} \tag{2.5}$$

herzuleiten, wobei $\hat{L} = \vec{L}/L$ der Einheitsvektor in $\vec{L}$-Richtung ist.

(f) Betrachten wir jetzt die $1/r^2$ Störung aus der vorherigen Aufgabe, so dass $f(r) = \frac{2C}{r^3}$ gilt. Zeigen Sie, dass die Änderung des Runge-Lenz-Vektors während eines Bahnumlaufs näherungsweise durch

$$\Delta\vec{A} = \frac{-2\pi Cm}{L^2}\hat{L} \times \vec{A} \tag{2.6}$$

gegeben ist.
Hinweis 1: Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass sich $\vec{r}$ in Polarkoordinaten ($\vec{r} = r(\cos\theta \hat{e}_x + \sin\theta \hat{e}_y)$) beschreiben lässt und dass $\hat{L} = L\hat{e}_z$.
Hinweis 2: $\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta = 0$ und $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta = \pi$.

(g) Vergleichen Sie Gleichung (2.6) mit der Formel für die Geschwindigkeit der Periheldrehung aus der vorherigen Aufgabe,

$$\Delta\theta = \frac{-2\pi m C}{L^2} \,. \tag{2.7}$$

Wie deuten Sie diese Übereinstimmung? Wie passt das mit der Skizze in Aufgabenteil (a) zusammen?