Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 8

Ausgabe: 11.06. – Abgabe: 18.06. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 21./22.06.

Aufgabe 1: Streuung an einer Oberfläche — 6 Punkte

In der Vorlesung haben wir den Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Teilchens an einer massiven Kugel berechnet. In dieser Aufgabe betrachten wir die elastische Streuung von Teilchen, die von $z = -\infty$ mit Anfangsgeschwindigkeit parallel zur z-Achse einfallen, an einem massiven Objekt, beschrieben durch die Punkte

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{x^2 + y^2} \leq b \sin(\tfrac{z}{a}) \text{ und } 0 \leq z \leq \pi a\right\}. \tag{1.1}$$

Das bedeutet, dass der Rand des Objektes eine Rotationsfläche um die z-Achse ist, die durch

$$\rho(z) = b \sin\left(\frac{z}{a}\right) \text{ für } 0 \leq z \leq \pi a \tag{1.2}$$

erzeugt wird. Die Parameter a und b sind positiv.

(a) Skizzieren Sie die Rotationsfläche. Zeichnen Sie die Bahn eines Teilchens mit Stoßparameter $0 < \rho < b$ und den Streuwinkel θ ein. Zeigen Sie mit Hilfe der Skizze, dass der halbe Streuwinkel mit der Steigung der Fläche zusammenhängt:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}\rho(z)}{\mathrm{d}z}. \tag{1.3}$$

(b) Leiten Sie aus Gleichung (1.3) das Verhältnis zwischen dem Stoßparameter und dem Streuwinkel

$$\rho(\theta) = \sqrt{b^2 - a^2 \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{1.4}$$

her.

(c) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta} = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{\mathrm{d}\rho(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|. \tag{1.5}$$

(d) Was sind die minimalen und maximalen Werte des Streuwinkels, θ_{min} und θ_{max}, die gerade den Stoßparametern $\rho \to b$ und $\rho \to 0$ entsprechen?

(e) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int_{\theta_{\text{min}}}^{\theta_{\text{max}}} \mathrm{d}\theta \, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta}. \tag{1.6}$$

Können Sie das einfache Ergebnis für σ geometrisch begründen?

Aufgabe 2: Streuung am $1/r^2$ Potential $\boxed{\textbf{5 Punkte}}$

In der Vorlesung wurde die Streuung am Coulomb-Potential $U(r) = \pm\alpha/r$ besprochen und die berühmte Rutherfordformel

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \frac{2\pi}{\sin^4(\theta/2)} \tag{2.1}$$

hergeleitet. In dieser Aufgabe berechnen wir den Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einem stärker lokalisierten, abstoßendem Potential,

$$U(r) = \alpha/r^2 \qquad\qquad \text{mit } \alpha > 0\,. \tag{2.2}$$

Der Streuwinkel ist durch

$$\theta = \pi - 2\rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - U(r)/E}} \tag{2.3}$$

gegeben. Die untere Grenze $r_{\min}$ ist gleich dem Abstand zwischen dem Ursprung und dem Wendepunkt, siehe Abb. 1.

(a) Zeigen Sie, dass in diesem Fall $r_{\min} = \sqrt{\rho^2 + \alpha/E}$ gilt.

(b) Führen Sie das Integral in Gleichung (2.3) aus und zeigen Sie, dass ein Teilchen mit Energie E und Stoßparameter ρ mit dem Winkel

$$\theta = \pi \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \alpha/E}}\right) \tag{2.4}$$

gestreut wird.

(c) Invertieren Sie Gleichung (2.4) um $\rho = \rho(\theta)$ zu bestimmen. Zeigen Sie, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt, definiert in Gleichung (1.5) in der vorherigen Aufgabe, durch

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta} = \frac{2\pi^3\alpha}{E} \frac{\pi - \theta}{\theta^2(2\pi - \theta)^2} \tag{2.5}$$

gegeben ist.

(d) Skizzieren Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion von θ zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$. Wie verhält sich die Funktion für $\theta \to 0$? Ist der totale Wirkungsquerschnitt endlich oder divergent?

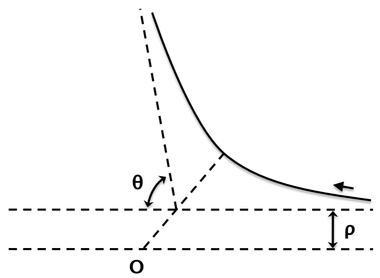

Abbildung 1: Definition des Stoßparameters ρ und Streuwinkels θ.

Aufgabe 3: Teilcheneinfang **7 Punkte**

In dieser Aufgabe sind wir an einem Prozess interessiert, in dem ein Teilchen aus dem Unendlichen einfällt und sich für $t \to \infty$ zum Ursprung $r = 0$ bewegt. Anders gesagt, das Teilchen wird durch das Zentralpotential eingefangen. Wir haben bereits auf dem letzten Übungsblatt untersucht, unter welchen Bedingungen an das Potential ein Teilchen die Drehimpulsbarriere überwinden und zum Ursprung gelangen kann. Wir wollen jetzt dieses System nochmal als Streuproblem untersuchen.

(a) Nehmen Sie an, dass die Teilchen entlang der z-Achse einfallen und drücken Sie den Drehimpuls M durch den Stoßparameter ρ aus.

Betrachten Sie nun ein anziehendes Potential $U(r) = -\beta/r^2$ mit $\beta > E\rho^2$.

(b) Was sind die minimalen und maximalen Werte des Stoßparameters, für die Teilcheneinfang stattfindet? Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt für Teilcheneinfang,

$$\sigma = \int \mathrm{d}\sigma = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \mathrm{d}\rho \, 2\pi\rho \,. \tag{3.1}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Bedingungen, die Sie in der letzten Aufgabe des letzten Übungsblatts hergeleitet haben.

Betrachten Sie jetzt das Potential $U(r) = \alpha/r - \beta/r^2$ mit $\alpha > 0$ und $\beta > E\rho^2$.

(c) Skizzieren Sie das effektive Potential $U_{\text{eff}}(r)$ in diesem Fall.

(d) Berechnen Sie den maximalen Wert U_0 des effektiven Potentials.

(e) Damit ein Teilchen das Zentrum erreichen kann, muss die Energie echt größer als U_0 sein. Zeigen Sie, dass dies eine obere Grenze an den Stoßparameter impliziert:

$$\rho^2 < \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2} \,. \tag{3.2}$$

(f) Nutzen Sie die Tatsache, dass der Stoßparameter positiv ist, um herzuleiten, dass

$$E > \frac{\alpha^2}{4\beta} \,, \tag{3.3}$$

damit ein Teilchen den Ursprung erreichen kann.

(g) Zeigen Sie, dass der totale Wirkungsquerschnitt für Teilcheneinfang durch

$$\sigma = \begin{cases} \pi \left(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2} \right) & \text{falls } E > \frac{\alpha^2}{4\beta} \,, \\ 0 & \text{falls } E < \frac{\alpha^2}{4\beta} \,, \end{cases} \tag{3.4}$$

gegeben ist.


</>
KEEP CALM
3
IT'S NOT
ROCKET SCIENCE
WAS? Theoretische Teilchen-Physik - was ist das eigentlich? Ein Vortrag von Prof. Melnikov
WANN? Mittwoch, den 16.06.21 um 18:00 Uhr
WO? Zoom - Siehe dafür: https://fachschaft.physik.kit.edu
eine Veranstaltung des Mentorenprogramms