

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

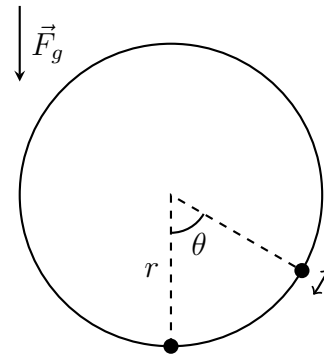
Übungsblatt 9

Ausgabe: 18.06. – Abgabe: 25.06. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 28./29.06.

Aufgabe 1: Schwingungen auf einer Kreisbahn

7 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir das in der nebenstehenden Skizze gezeigte System. Ein Teilchen der Masse m mit elektrischer Ladung q kann sich frei auf einem Kreisdraht mit Radius r bewegen. Es steht unter dem Einfluss der nach unten wirkenden Schwerkraft $\vec{F}_g = -mg\hat{e}_z$. Zudem ist am untersten Punkt des Drahts ein Teilchen (ebenfalls mit Ladung q) fixiert, das das andere Teilchen durch die Coulombkraft abstößt. Der Einfachheit halber wählen wir die Einheiten so, dass das Coulombpotential zwischen zwei Teilchen mit Ladung q und Abstand d durch q^2/d gegeben ist.



- (a) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion für das bewegliche Teilchen durch

$$L = \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + mgr \cos(\theta) - \frac{q^2}{2r \sin(\theta/2)} \quad (1.1)$$

gegeben ist.

- (b) Nehmen Sie an, dass $K = \frac{q^2}{8mgr^2} < 1$ gilt, sodass ein Gleichgewichtszustand des beweglichen Teilchens bei einem Winkel θ_0 zwischen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$, besteht. Finden Sie diesen Gleichgewichtswinkel und drücken Sie ihn durch r , g , m und q aus.
- (c) Wählen Sie eine neue Koordinate $\xi = \theta - \theta_0$ und zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion in der Nähe des Gleichgewichtswinkels θ_0 als

$$L = \frac{a}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{b}{2}\xi^2 \quad (1.2)$$

genähert werden kann. Bestimmen Sie a und b .

- (d) Wie kann die neue Koordinate ξ alternativ gewählt werden, damit die Näherung der Lagrangefunktion durch

$$L = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{b'}{2}\xi^2 \quad (1.3)$$

gegeben ist?

- (e) Die Bewegung besteht aus kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung unter Verwendung der genäherten Lagrangefunktion in Gleichung (1.2) oder Gleichung (1.3) und bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω dieser Schwingungen.

Aufgabe 2: Erzwungene Schwingungen

3 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir die Auswirkungen einer externen Kraft auf einen harmonischen Oszillator. Dies bezeichnet man als erzwungene Schwingung.

- (a) Erzwungene Schwingungen lösen die Gleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}. \quad (2.1)$$

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist die spezielle Lösung

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t \frac{F(\tau)}{m\omega} \sin(\omega(t - \tau)) d\tau, \quad (2.2)$$

wobei t_0 eine beliebige Konstante ist. Das bedeutet, dass die allgemeine Lösung durch

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + x_p(t) \quad (2.3)$$

gegeben ist, wobei A und ϕ freie Parameter sind. Prüfen Sie die Gültigkeit dieser Lösung, indem Sie Gleichung (2.3) in Gleichung (2.1) einsetzen.

- (b) Ein häufig auftretender Fall ist eine harmonische Kraft $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$, wobei sich Ω im Allgemeinen von der Eigenfrequenz ω unterscheidet. Leiten Sie für diese harmonische Kraft den allgemeinen Ausdruck für $x(t)$ her. Sie können $t_0 = 0$ annehmen.

Aufgabe 3: Gedämpfte Schwingungen

4 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir gedämpfte Schwingungen in einer Dimension. Gedämpfte Schwingungen ergeben sich durch die Einwirkung einer Kraft

$$F = -kx - \mu \dot{x}. \quad (3.1)$$

Die Bewegungsgleichung ist dann gegeben als

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.2)$$

- (a) Drücken Sie γ und ω_0 für ein Teilchen der Masse m in Abhängigkeit von k , μ und m aus.

- (b) Wenn $\gamma < 2\omega_0$ gilt, nennt man die Schwingung “schwach gedämpft”. Überprüfen Sie, dass in diesem Fall die Bewegungsgleichung durch

$$x = x_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t) \quad (3.3)$$

gelöst wird, wobei

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}. \quad (3.4)$$

- (c) Was ist das Verhältnis der Amplituden von zwei aufeinanderfolgenden Schwingungen eines schwach gedämpften Oszillators zur gleichen Seite hin?
- (d) Wenn Reibung in Betracht gezogen wird, ist die Energie des Teilchens nicht erhalten. Was ist die Energie von einem schwach gedämpften Oszillator als Funktion der Zeit? (Nehmen Sie an, dass $\gamma \ll \omega_0$.)