SoSe 2021

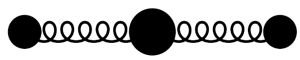
Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 10

Ausgabe: 25.06. – Abgabe: 02.07. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 05./06.07.

Aufgabe 1: Dreiatomiges Molekül — 10 Punkte



In dieser Aufgabe modellieren wir ein geradliniges dreiatomiges Molekül mit einem zentralen Atom der Masse M und zwei identischen Atomen der Masse m an den Endpunkten. Ein Beispiel eines solchen Moleküls ist CO_2. Wir modellieren die atomaren Kräfte zwischen dem zentralen Atom und den Seitenatomen als Federn mit Federkonstante k, welche in Ruhelage eine Länge ℓ haben. Wir betrachten nur die Bewegung entlang der Symmetrieachse des Moleküls, was das Problem eindimensional macht. Wir bezeichnen die Position des zentralen Atoms als q_2 und die Position der Seitenatome als q_1 und q_3.

(a) Das Potential einer Feder ist durch $U = \frac{k}{2}\xi^2$ gegeben, wobei ξ die Auslenkung aus der Ruhelage bezeichnet. Wie lautet die Lagrangefunktion in Abhängigkeit der Koordinaten $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$?

(b) Wir führen neue Koordinaten $\vec{\xi} = \vec{q} - \vec{q}_0$ relativ zur Ruhelage ein, wobei $\vec{q}_0 = (-\ell, 0, \ell)$. Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion die Form

$$L = \sum_{i,j} \left(\frac{1}{2} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - \frac{1}{2} k_{ij} \xi_i \xi_j \right) \tag{1.1}$$

hat, und bestimmen Sie damit die 3×3 Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$. Vergewissern Sie sich, dass $\hat{m}$ und $\hat{k}$ symmetrisch sind.

(c) Lösen Sie die zu Gleichung (1.1) gehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen mit einem Kosinus als Ansatz, $\vec{\xi}_s = \vec{a}_s \cos(\omega_s t + \varphi)$. Zeigen Sie, dass die Amplituden $\vec{a}$ die Gleichung

$$\big(- \omega_s^2 \hat{m} + \hat{k} \big) \vec{a}_s = 0 \tag{1.2}$$

erfüllen.

(d) Ein solches Gleichungssystem erlaubt nur von Null verschiedene Lösungen für $\vec{a}_s$, wenn $\det(-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}) = 0$. Warum ist das so?

(e) Berechnen Sie $\det(-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k})$. Leiten Sie aus der Bedingung in (d) her, dass die Eigenfrequenzen gleich

$$\omega_1^2 = 0\,, \qquad \omega_2^2 = \frac{k}{m}\,, \qquad \omega_3^2 = \frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right) \tag{1.3}$$

sind.

(f) Bestimmen Sie die zu den drei obigen ω_s^2 gehörigen Eigenamplituden $\vec{a}^{(s)}$, mit $s = 1, 2, 3$. Orthonormieren Sie die Eigenvektoren mit

$$a_i^{(s')}\, m_{ij}\, a_j^{(s)} = \delta^{s's}\,. \tag{1.4}$$

(g) Was ist die geometrische Beschreibung der Schwingung jedes Eigenvektors $\vec{a}^{(s)}$?

(h) Die Eigenvektoren $\vec{a}^{(s)}$ erfüllen auch die Bedingung $a_i^{(s')}\, k_{ij}\, a_j^{(s)} = \omega_s^2 \delta^{s's}$. Wie in der Vorlesung gezeigt, lassen sich die Auslenkungen aus der Ruhelage als

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{s=1}^{3} r_s(t)\vec{a}^{(s)}\,, \tag{1.5}$$

mit den Normalkoordinaten r_s schreiben. Die Lagrangefunktion lässt sich dann als eine Summe von drei Lagrangefunktionen schreiben,

$$L = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}[\dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2]\,, \tag{1.6}$$

sodass die Normalkoordinaten unabhängig voneinander sind. Die Bewegungsgleichungen für die einzelnen r_s haben die bekannte Form:

$$\ddot{r}_s + \omega_s^2 r_s = 0 \qquad\qquad \Rightarrow r_s(t) = C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s)\,, \tag{1.7}$$

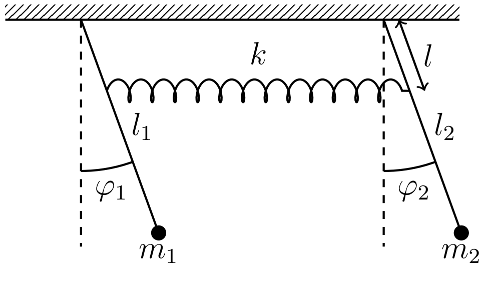
beziehungsweise $r_s(t) = C_s + D_s t$ falls $\omega_s = 0$. Es seien nun für die drei Atome die folgenden Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ vorgegeben:

$$\vec{q}(t=0) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{10}\ell \\ -\frac{2m\ell}{10M} \\ \ell \end{pmatrix}, \qquad\qquad \dot{\vec{q}}(t=0) = \vec{0}\,. \tag{1.8}$$

Bestimmen Sie daraus die Konstanten C_s und φ_s (bzw. C_s und D_s), welche die Bewegung des Moleküls charakterisieren.

Aufgabe 2: Gekoppelte Pendel $\boxed{\textbf{10 Punkte}}$

Zwei Pendel der Längen l_1 and l_2 seien über eine Feder mit Federkonstante k miteinander verbunden. Der Abstand der beiden Pendel sei wesentlich größer als der Abstand l zwischen dem Befestigungspunkt der Feder an den Pendeln und dem Aufhängungspunkt der Pendel, so dass die Feder immer nahezu waagerecht ist. An den Pendeln sind am Ende die Massen m_1 bzw. m_2 befestigt.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungswinkel φ_1 und φ_2 der Pendel her.

(b) Nähern Sie die Lagrangefunktion und Bewegungsgleichungen für den Fall kleiner Auslenkungen. Im folgenden betrachten wir immer diese Näherung.

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Spezialfall $m_1 = m_2$ und $l_1 = l_2$ und die Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = \varphi_0\,, \qquad \varphi_2(0) = 0\,, \tag{2.1}$$

$$\dot{\varphi}_1(0) = 0\,, \qquad \dot{\varphi}_2(0) = 0\,. \tag{2.2}$$

Zeigen Sie, dass die Lösungen in die Form

$$\varphi_1(t) = A\cos(\Omega t)\cos(\omega t)\,, \qquad \varphi_2(t) = A\sin(\Omega t)\sin(\omega t) \tag{2.3}$$

gebracht werden können.

(d) Beschreiben Sie qualitativ, wie sich die beiden Pendel gemäß dieser Lösungen verhalten. Was sind die Rollen von Ω und ω? Skizzieren Sie das Verhalten von $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$.

(e) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Fall $m_1 \neq m_2$ und $l_1 = l_2$ mit den gleichen Anfangsbedingungen wie zuvor.

(f) Plotten Sie das Verhalten von $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$. Dazu können Sie ein Computeralgebrasystem Ihrer Wahl benutzen. Eine kostenlose Möglichkeit im Internet, Graphen zu plotten finden Sie zum Beispiel auf `https://www.geogebra.org/`. Beschreiben Sie wieder qualitativ das Verhalten der beiden Pendel.


</>
KEEP CALM
IT'S NOT
ROCKET SCIENCE
WAS? Vortrag von Prof. Ustinov - So löten Sie einen Quantencomputer
WANN? Donnerstag, den 01.07.21 um 18:00 Uhr
WO? Zoom - Siehe dafür:
https://fachschaft.physik.kit.edu
eine Veranstaltung des Mentorenprogramms