Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 11

Ausgabe: 02.07. – Abgabe: 09.07. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 12./13.07.

Aufgabe 1: Hamiltonfunktion verschiedener Systeme $\boxed{\text{5 Punkte}}$

Bestimmen Sie die kanonischen Impulse, die Hamiltonfunktion und die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die folgenden Systeme.

(a) Ein freies Teilchen der Masse m in einer Dimension.

(b) Ein harmonischer Oszillator der Masse m und Winkelfrequenz ω in einer Dimension.

(c) Ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential $U(x) = \alpha x^n$.

(d) Ein Teilchen der Masse m in einem dreidimensionalen Potential $U(r) = -k/r$. Nutzen Sie Polarkoordinaten r, θ, ϕ.

(e) Zwei Teilchen der Massen m und M, die gravitativ in einer zweidimensionalen Ebene miteinander wechselwirken. Nutzen Sie für beide Teilchen kartesische Koordinaten x_i, y_i. (Was wäre eine bessere Wahl der Koordinaten?)

Aufgabe 2: Runge-Lenz-Vektor und Poissonklammern $\boxed{\text{5 Punkte}}$

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m mit Ortsvektor $\vec{r}$ und Impuls $\vec{p}$ im dreidimensionalen Raum. Der Drehimpuls des Teilchens ist $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$.

(a) Berechnen Sie die Poissonklammern

$$\{M_i, r_j\}\,, \qquad \{M_i, p_j\}\,, \qquad \{M_i, M_j\}\,, \qquad \{M_i, M^2\}\,. \tag{2.1}$$

Nutzen Sie dazu vor allem auch die Eigenschaften der Poissonklammern, die in der Vorlesung in Kapitel 9 in Gl. (20) bis (22) eingeführt wurden.

(b) Der Runge-Lenz-Vektor ist durch $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{M} - mk\hat{r}$ gegeben, wobei $\hat{r} = \vec{r}/r$ der Einheitsvektor in Radialrichtung ist. Beweisen Sie mit Hilfe der Poissonklammern, dass der Runge-Lenz-Vektor im Keplerproblem erhalten ist. Zeigen Sie also, dass $\{H, A_i\} = 0$ für die Hamiltonfunktion $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$ gilt.

(c) Wir haben bereits in einer früheren Aufgabe gezeigt, dass der Runge-Lenz-Vektor nicht mehr erhalten ist, wenn das Potential zusätzlich zum r^{-1}-Term eine r^{-2}-Korrektur enthält. Betrachten Sie die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} + \frac{C}{r^2} \tag{2.2}$$

und berechnen Sie die Zeitableitung des Runge-Lenz-Vektors mit Hilfe der Poissonklammern und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat aus Aufgabe 8.2 (d).

Aufgabe 3: Teilchen im Magnetfeld

9 Punkte

Die Bewegung eines Teilchens der Masse m und Ladung e wird durch die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \left(e\phi(\vec{r},t) - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}}\right) , \tag{3.1}$$

beschrieben, wobei ϕ und $\vec{A}$ die elektromagnetischen Potentiale sind.

(a) Bestimmen Sie den kanonischen Impuls $\vec{p}$, konstruieren Sie die Hamiltonfunktion und zeigen Sie, dass die Hamiltongleichungen durch

$$\dot{r}_i = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right) , \qquad \dot{p}_i = \frac{e}{mc}\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - e\frac{\partial \phi}{\partial r_i} , \tag{3.2}$$

gegeben sind.

(b) Leiten Sie die Lorentzkraft aus den Hamiltongleichungen her.
Hinweis: Benutzen Sie Indexnotation und verwenden Sie die folgenden Ausdrücke für das elektrische und magnetische Feld

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial r_i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} , \qquad B_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial r_j} . \tag{3.3}$$

(c) In Gegenwart eines magnetisches Feldes gilt, dass $\vec{p} \neq m\vec{v}$, wobei $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$. Dies folgt aus der ersten Hamiltongleichung in Gleichung (3.2). Dies kann man auch mit Hilfe der Poissonklammern sehen: Zeigen Sie, dass trotz $\{p_i, p_j\} = 0$

$$\{v_i, v_j\} = -\frac{e}{m^2 c}\epsilon_{ijk}B_k \tag{3.4}$$

gilt.

(d) Betrachten Sie ein auf die x, y-Ebene beschränktes Teilchen, mit den Potentialen $\phi(\vec{r},t) = 0$ und $\vec{A}(\vec{r},t) = (-By, 0, 0)^T$. Wie lauten die zugehörigen $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder? Geben Sie die Hamiltongleichungen für diesen spezifischen Fall an. Zeigen Sie, dass daraus folgt

$$m\dot{y} + \frac{eB}{c}x = K_1 , \qquad m\dot{x} - \frac{eB}{c}y = K_2 , \tag{3.5}$$

mit unbekannten Konstanten $K_{1,2}$.

(e) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von Gleichung (3.5) durch

$$x(t) = \frac{K_1}{m\omega} + R\sin(\omega t + \phi)\,, \tag{3.6}$$

$$y(t) = -\frac{K_2}{m\omega} + R\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{3.7}$$

gegeben ist, wobei $\omega = \frac{eB}{mc}$ und R und ϕ zunächst unbekannte Integrationskonstanten sind.

(f) Fordern Sie die Randbedingungen $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ und $\dot{y}(0) = 0$, und skizzieren Sie die Bewegung des Teilchens.