Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 12

Ausgabe: 09.07. – Abgabe: 16.07. @ 10:00 Uhr – Besprechung: 19./20.07.

Aufgabe 1: Anharmonischer Oszillator — 5 Punkte

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie sich die Beziehung zwischen den alten und den neuen Koordinaten und Impulse unter einer kanonischen Transformation $\{p, q\} \to \{P, Q\}$, kompakt durch die erzeugende Funktion $F(q, Q, t)$ beschreiben lässt, wobei

$$\frac{\partial F}{\partial q} = p\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial Q} = -P\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = K - H\,. \tag{1.1}$$

Die Abhängigkeit der erzeugenden Funktion von q und Q als unabhängige Variablen ist dabei aber nicht die einzige mögliche Wahl. Möglich sind ebenfalls die erzeugenden Funktionen $F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$ und $F_4(p, P, t)$. In dieser Aufgabe betrachten wir einen anharmonischen Oszillator, der durch die Hamiltonfunktion

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m}(1 + \epsilon\beta q) + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2(1 + \epsilon\alpha q) \tag{1.2}$$

beschrieben wird, wobei ϵ eine kleine dimensionslose Konstante ist. Wir untersuchen nun die kanonische Transformation, die durch die erzeugende Funktion $F_2(q, P, t)$ beschrieben wird.

(a) Für die erzeugende Funktion $F(q, Q, t)$ impliziert das Verschwinden der Variation der Wirkung die folgende Bedingung:

$$\mathrm{d}F(q, Q, t) = p\,\mathrm{d}q - P\,\mathrm{d}Q + (K - H)\,\mathrm{d}t\,, \tag{1.3}$$

wobei $K(P, Q)$ die Hamiltonfunktion für die neuen Koordinaten ist. Addieren Sie das Differential $\mathrm{d}(PQ)$ zu beiden Seiten der obigen Gleichung und schreiben Sie die rechte Seite als ein Differential einer Funktion der Variablen q, P und t um. Identifizieren Sie die linke Seite mit $\mathrm{d}F_2(q, P, t)$ und leiten Sie daraus die Beziehungen

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = p\,, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P} = Q\,, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial t} = K - H \tag{1.4}$$

her.

(b) Welche Transformation wird durch $F_2(q, P, t) = qP$ generiert?

(c) Betrachten wir nun die erzeugende Funktion

$$F_2(q, P, t) = qP + \epsilon a q^2 P + \epsilon b P^3\,. \tag{1.5}$$

Bestimmen Sie die Werte von a und b, so dass $K(Q, P)$, bis einschließlich der Ordnung ϵ, die Hamiltonfunktion eines *harmonischen* Oszillators ist.

(d) Drücken Sie $q(t)$ durch die bekannten sinusförmigen Lösungen des harmonischen Oszillators aus.

Aufgabe 2: Flächen im Phasenraum $\boxed{\textbf{6 Punkte}}$

Betrachten wir den harmonischen Oszillator, der durch die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m q^2 \omega^2 \tag{2.1}$$

beschrieben wird.

(a) Überprüfen Sie, dass

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \theta_0)\,, \qquad p = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \theta_0)\,, \tag{2.2}$$

die Hamiltongleichungen lösen.

(b) Skizzieren Sie den Pfad einer Schwingung im (q, p) Phasenraum, und geben Sie dabei die Abhängigkeit von E und t an.

(c) Seien m und ω präzise bekannt. Die Energie liege innerhalb des Intervalls zwischen E_0 und $E_0 + \mathrm{d}E$. Die Zeit liege ebenfalls zwischen t_0 und $t_0 + \mathrm{d}t$. Betrachten Sie die Abbildung $\{p, q\} \to \{E, t\}$ und bestimmen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche im (q, p)-Phasenraum, in dem sich das Teilchen befinden kann, in Abhängigkeit von $\mathrm{d}E$ und $\mathrm{d}t$.
Hinweis: Betrachten Sie die Änderung einer infinitesimalen Oberfläche unter Variablensubstitution.

(d) Führen wir nun eine kanonische Transformation, zu den neuen Variablen Q und P aus, die durch die erzeugende Funktion

$$F = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot(Q)\,, \tag{2.3}$$

definiert ist. (Hierbei ist cot der Kotangens $\cot(z) = \cos(z)/\sin(z)$.)
Finden Sie Ausdrücke für q und p in Abhängigkeit von Q und P.

(e) Finden Sie Ausdrücke für Q und P.

(f) Skizzieren Sie den Pfad einer Schwingung im (Q, P) Phasenraum, und berechnen Sie den Flächeninhalt der Oberfläche auf der sich das Teilchen befinden kann, falls es die vorher besprochene $\mathrm{d}E$ und $\mathrm{d}t$ Unbestimmtheit besitzt.

Aufgabe 3: Wirkung als erzeugende Funktion $\boxed{\textbf{6 Punkte}}$

Die Bewegung eines Teilchens im homogenen Schwerefeld unterliegt der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq \tag{3.1}$$

und die Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen sind durch

$$q(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{P}{m}t + Q \qquad \text{und} \qquad p(t) = P - mgt \tag{3.2}$$

gegeben, wobei (Q, P) die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ parametrisieren.

(a) Für einen festen Zeitpunkt t kann man die Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen als Transformationen auffassen, die den Anfangsbedingungen (Q, P) die Koordinate und den Impuls zum Zeitpunkt t, also $(q(t), p(t))$ zuordnet. Ist diese Transformation kanonisch?

Als nächstes soll das umgekehrte Problem untersucht werden, also die Frage: gegeben die Lösung (q, p), kann man direkt die Erzeugende $S(q, P, t)$ einer kanonischen Transformation finden, die zurück auf die Anfangsbedingungen (Q, P) transformiert?

(b) Bestimmen Sie ausgehend von der Hamiltonfunktion $H(q, p)$ die Geschwindigkeit $\dot{q}(q, p)$ und die Lagrangefunktion $L(q, \dot{q})$.

(c) Berechnen Sie für eine Lösung der Bewegungsgleichungen die Wirkung

$$S = QP + \int_0^t \mathrm{d}t'\, L(q(t'), \dot{q}(t'))\,. \tag{3.3}$$

Drücken Sie das Resultat als Funktion von $q = q(t)$, P und t aus.

(d) Benutzen Sie $S(q, P, t)$ als erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation von (q, p) zu (Q, P). Was ist die neue Hamiltonfunktion $K(Q, P)$? Interpretieren Sie das Resultat.