Karlsruher Institut für Technologie

SoSe 2021

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. A. Behring

Übungsblatt 13

Ausgabe: 16.07. – Abgabe: 23.07. @ 10:00 Uhr – Besprechung: —

Anmerkung: Dieses Übungsblatt ist ein „Bonusblatt", das nicht zu der erreichbaren Maximalpunktzahl zählt, das aber trotzdem ermöglicht, weitere Punkte zu sammeln. Sie können die Lösungen wie gewohnt über ILIAS einreichen und Ihre Tutoren werden Ihre Abgaben korrigieren. Die Rückgabe erfolgt am Anfang der letzten Juli-Woche. Es wird keine Saalübung oder Tutorien zu diesem Blatt geben, aber wir werden eine Lösung dazu veröffentlichen. Wenn Sie Fragen haben, können Sie diese gerne im Forum stellen und wir werden versuchen, sie dort zu beantworten.

Aufgabe 1: Trägheitsmomente — 4 Punkte

Berechnen Sie das Trägheitsmoment

(a) eines Fußballs (äußerer Radius $R_a = 15\,\text{cm}$, Dicke des homogenen Materials $d \ll R_a$, Masse $M = 0.4\,\text{kg}$) für eine Drehung um eine Achse durch den Mittelpunkt,

(b) eines Wassermoleküls (m und M seien die Massen des Wasserstoff- (H) und Sauerstoffatoms O) bezogen auf eine Achse, die durch den Schwerpunkt S des Moleküls geht und senkrecht auf der Molekülebene steht. Gegeben seien die Abstände $\overline{HH} = 2a$ und $\overline{OH} = b$.

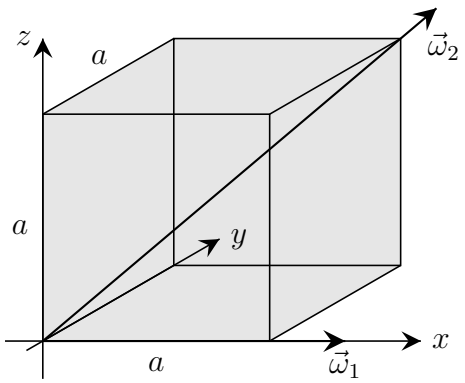
Hinweise: Zu (a): Berechnen Sie zunächst das Trägheitsmoment I und das Volumen einer Hohlkugel mit Innen- und Außenradius $R_a - d$ und R_a und geben Sie dann eine Näherungsformel für I an.
Zu (b): Die Atome werden als punktförmig betrachtet. Die Molekülebene wird durch die Verbindungsvektoren zwischen den Aufenthaltsorten der Atome aufgespannt.

Aufgabe 2: Trägheitstensor und Hauptachsentransformation — 8 Punkte

Gegeben sei ein Würfel mit Kantenlänge a und der Massendichte

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \frac{r^2}{a^2}\,,$$

wobei der Ursprung des Koordinatensystems mit der unteren linken Ecke des Würfels zusammenfällt (siehe Skizze).



(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor des Würfels.

(b) Der Würfel rotiere mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_1$ um die x-Achse (siehe Skizze). Bestimmen Sie den Drehimpuls des Würfels. Sind der Drehimpuls und die Rotationsachse parallel zueinander?

(c) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente und -achsen des Würfels.

(d) Der Würfel rotiere nun mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_2$ um seine Hauptdiagonale (siehe Skizze). Bestimmen Sie wieder den Drehimpuls des Würfels. Sind Drehimpuls und Rotationsachse parallel zueinander? Was ist der Unterschied zu b)?

Aufgabe 3: Rollender Kegel — 8 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor eines Kreiskegels (Masse M, Höhe h, Öffnungswinkel 2α, homogene Massenverteilung) bezogen auf das in Abb. 1 gezeigte, körperfeste Koordinatensystem diagonal ist. Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente.

(b) Der Kegel rollt in der xy-Ebene des raumfesten Koordinatensystems (x, y, z), wobei die Spitze festgehalten wird (siehe Abb. 2). Berechnen Sie die kinetische Energie des Kegels als Funktion der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$.

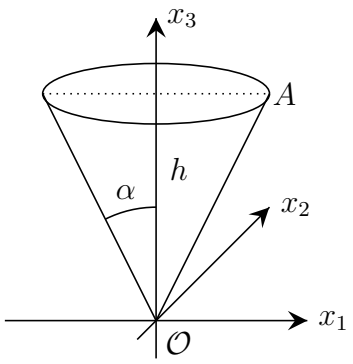


Abbildung 1: Kreiskegel im körperfesten Koordinatensystem

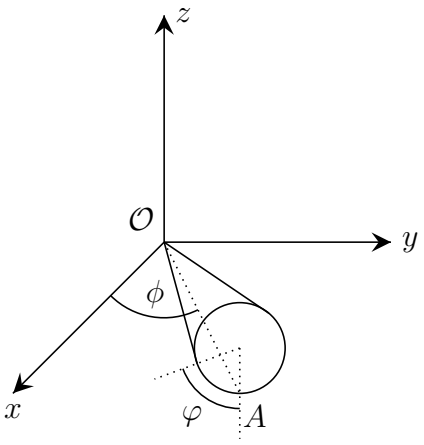


Abbildung 2: Rollender Kreiskegel

Lösung der Aufgabe 1

(a) 2 Punkte *Trägheitsmoment eines Fußballs*
Die Berechnung des Trägheitsmoments eines Fußballs entspricht der Berechnung des Trägheitsmoments einer Hohlkugel mit Radius R_a und einer dünnen Hülle. Dazu berechnen wir zuerst das Trägheitsmoment einer Hohlkugel mit endlicher Hüllendicke d und nähern im zweiten Schritt $d \ll R_a$.
Das Volumen einer Hohlkugel mit Innenradius $R_a - d$ und Außenradius R_a ist durch

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(R_a^3 - (R_a - d)^3\right) \tag{1.1}$$

gegeben. Da wir eine homogene Massendichte annehmen, lautet diese

$$\rho(\vec{r}) = \frac{M}{V}\theta(r - (R_a - d))\theta(R_a - r)\,. \tag{1.2}$$

Die Hohlkugel ist symmetrisch und den Ursprung, so dass sie das gleiche Trägheitsmoment um jede Achse durch diesen Punkt hat. Wir arbeiten in Kugelkoordinaten und wählen die z-Achse des Koordinatensystems so, dass sie mit der Rotationsachse übereinstimmt. Das Trägheitsmoment lautet dann

$$\begin{aligned}
I &= \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r})r_\perp^2 \\
&= \frac{M}{V}\int_0^\infty \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, r^2 \sin\vartheta\,(r\sin\vartheta)^2\theta(r - (R_a - d))\theta(R_a - r) \\
&= 2\pi\frac{M}{V}\int_{R_a-d}^{R_a} \mathrm{d}r \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\vartheta\, r^4(1 - \cos^2\vartheta) \\
&= 2\pi\frac{M}{V}\left[\frac{r}{5}\right]_{r=R_a-d}^{R_a}\left[\cos\vartheta - \frac{\cos\vartheta}{3}\right]_{\cos\vartheta=-1}^{1} \\
&= \frac{8\pi M}{15V}(R_a^5 - (R_a - d)^5) = \frac{2}{5}M\frac{R_a^5 - (R_a - d)^5}{R_a^3 - (R_a - d)^3} \\
&\approx \frac{2}{5}M\left(\frac{5}{3}R_a^2 + \mathcal{O}(d)\right) = \frac{2}{3}MR_a^2 + \mathcal{O}(d)\,.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Wenn wir nun die numerischen Werte für die Masse und den Radius aus der Aufgabenbeschreibung einsetzen ($M = 0.4\,\mathrm{kg}$ und $R_a = 0.15\,\mathrm{m}$) ergibt sich

$$I = 0.006\,\mathrm{kg\,m^2}\,. \tag{1.4}$$

(b) 2 Punkte *Trägheitsmoment eines Wassermoleküls*
Wir berechnen zuerst den Schwerpunkt, durch den die Rotationsachse gehen soll. Wir wählen als Koordinatenursprung die Position des Sauerstoffatoms.

Die Positionen der Atome sind dann

$$\vec{r}_{H,1} = \begin{pmatrix} -a \\ \sqrt{b^2 - a^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_{H,2} = \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{b^2 - a^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r}_O = \vec{0}\,. \tag{1.5}$$

Damit erhalten wir für den Schwerpunkt

$$\vec{S} = \frac{m\vec{r}_{H,1} + m\vec{r}_{H,2} + M\vec{r}_O}{2m + M} = \frac{2m}{2m + M}\sqrt{b^2 - a^2}\hat{e}_y\,. \tag{1.6}$$

Da sich alle Atome in der gleichen Ebene befinden und die Rotationsachse senkrecht darauf stehen soll, ist der senkrechte Abstand der Atome zur Rotationsachse gerade ihr Abstand zum Schwerpunkt. Wir berechnen damit das Trägheitsmoment des Systems und erhalten

$$\begin{aligned} I &= m|\vec{r}_{H,1} - \vec{S}|^2 + m|\vec{r}_{H,2} - \vec{S}|^2 + M|\vec{r}_O - \vec{S}|^2 \\ &= 2m\left[a^2 + \left(1 - \frac{2m}{2m + M}\right)^2 (b^2 - a^2)\right] + M\frac{4m^2}{(2m + M)^2}(b^2 - a^2) \\ &= \frac{2m}{2m + M}(2ma^2 + Mb^2)\,. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Lösung der Aufgabe 2

(a) 3 Punkte *Berechne Trägheitstensor*
Sowohl der Würfel als auch seine Massendichte sind symmetrisch unter Vertauschung der Koordinatenachsen. Daher sind alle Diagonalelemente des Trägheitstensors gleich und das gleiche gilt für alle Nebendiagonalelemente. Daher reicht es, nur z.B. I_{xx} und I_{xy} zu berechnen. Ausgehend von der Definition

$$I_{ij} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r})\left(r^2\delta_{ij} - r_i r_j\right)\,, \tag{2.1}$$

berechnen wir

$$I_{xx} = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z\,\frac{\rho_0}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2) = \frac{38}{45}\rho_0 a^5\,, \tag{2.2}$$

$$I_{xy} = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}z\,\frac{\rho_0}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2)(-xy) = -\frac{1}{3}\rho_0 a^5\,. \tag{2.3}$$

Somit lautet das Ergebnis für den Trägheitstensor des Würfels

$$I = \rho_0 a^5 \begin{pmatrix} \frac{38}{45} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{38}{45} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{38}{45} \end{pmatrix}\,. \tag{2.4}$$

(b) 1 Punkt *Drehimpuls für Rotation um x-Achse*
Die Winkelgeschwindigkeit und der Drehimpuls hängen über

$$\vec{M} = I\vec{\omega} \tag{2.5}$$

zusammen. In dieser Teilaufgabe ist die Winkelgeschwindigkeit durch $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \hat{e}_x$ gegeben, was den Drehimpuls

$$\vec{M} = \rho_0 a^5 \begin{pmatrix} \frac{38}{45} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{38}{45} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{38}{45} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho_0 a^5 \begin{pmatrix} \frac{38}{45} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

ergibt. Dies ist natürlich nicht zu $\vec{\omega}_1$ parallel.

(c) 3 Punkte *Hauptachsentransformation*
Die Hauptträgheitsmomente sind gerade die Eigenwerte des Trägheitstensors. Wir berechnen also zuerst das charakteristische Polynom

$$0 = \det(I - \lambda \mathbb{1}) = \frac{22472}{91125} a^{15} \rho_0^3 - \frac{1219}{675} a^{10} \rho_0^2 \lambda + \frac{38}{15} a^5 \rho_0 \lambda - \lambda^3 \tag{2.7}$$

und bestimmen dessen Nullstellen

$$\lambda_1 = \frac{8}{45} a^5 \rho_0 \,, \qquad \lambda_2 = \frac{53}{45} a^5 \rho_0 \,, \qquad \lambda_3 = \frac{53}{45} a^5 \rho_0 \,. \tag{2.8}$$

Anmerkungen: Eine Möglichkeit, diese Nullstellen ohne einen Computer zu finden, ist die Determinante zu betrachten (wir lassen hier den Vorfaktor $a\rho_0^5$ der Übersichtlichkeit halber weg),

$$\begin{vmatrix} \frac{38}{45} - \lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{38}{45} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{38}{45} - \lambda \end{vmatrix} , \tag{2.9}$$

und zu untersuchen, wann sie verschwindet. Es ist dann leicht zu sehen, dass dies für $\lambda = \frac{38}{45} + \frac{1}{3} = \frac{53}{45}$ passiert, da dann alle Spalten- und Zeilenvektoren durch $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ gegeben sind. Die zweite Nullstelle finden wir dann in dem Fall, wenn die Summe der ersten beiden Zeilen (was die Determinante nicht ändert) gerade minus der dritten Zeile entspricht. Dies ergibt dann $\lambda = \frac{38}{45} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{45}$.
Eine andere Möglichkeit, die zwar in diesem konkreten Fall nicht ganz praktikabel per Hand auszuführen ist, aber dennoch kurz erklärt werden soll, ist, den Satz über rationale Nullstellen zu benutzen: Gegeben sei ein Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten. (Ein Polynom mit rationalen Koeffizienten kann immer durch Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner in ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten überführt werden, ohne die Nullstellen zu ändern.) Wir schreiben dieses als

$$a_n x^n + \cdots + a_0 x^0 \,. \tag{2.10}$$

Für jede rationale Nullstelle $x = \frac{p}{q}$, wobei p und q teilerfremd sein sollen, muss der Koeffizient a_0 ohne Rest durch p und der Koeffizient a_n ohne Rest

durch q teilbar sein. Also können wir alle Teiler von p und q bestimmen und dann alle möglichen rationalen Zahlen aus Kombinationen dieser Teiler konstruieren. Damit haben wir alle Kandidaten für rationale Nullstellen der Polynoms gefunden, die wir durch Einsetzen überprüfen können. Natürlich garantiert das nicht, dass wir alle Nullstellen finden (sie könnten ja auch irrational oder komplex sein) und es ermöglicht es auch nicht, Nullstellen für Polynome mit irrationalen oder komplexen Koeffizienten zu finden, aber es ist ein nützliches Werkzeug, um eine Nullstelle zu finden. Diese können wir dann mit einer Polynomdivision entfernen, um ein Polynom mit niedrigerem Grad zu finden, bei dem wir das Gleiche nochmal versuchen können. In dem hier vorliegenden Fall ist natürlich die Zahl der Kandidaten für die Nullstellen recht groß (672, um genau zu sein), da die Anzahl der Faktoren von a_0 und a_3 groß ist:

$$x = \pm \frac{p}{q}\,, \tag{2.11}$$

$$p \in \{1, 2, 4, 8, 53, 106, 212, 424, 2809, 5618, 11236, 22472\}\,, \tag{2.12}$$

$$q \in \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 125, 135, 225, 243, 375, 405, 675, 729, 1125, 1215, 2025, 3375, 3645, 6075, 10125, 18225, 30375, 91125\}\,. \tag{2.13}$$

Diese Methode kann aber sehr nützlich für Polynome mit kleinen Koeffizienten sein (insbesondere, wenn a_n oder a_0 gerade 1 sind). Wenn "raten" oder grafisches Auffinden einer Nullstelle fehlschlägt und wenn die Koeffizenten die Verwendung dieser Methode zulassen, ist dies definitiv etwas, das man als nächsten Schritt versuchen kann.
Wir machen jetzt mit der eigentlichen Rechnung weiter: Die Hauptträgheitsachsen sind die Eigenvektoren des Trägheitstensors. Um sie zu berechnen, müssen wir die linearen Gleichungssysteme

$$(I - \lambda_i \mathbb{1})\vec{v}^{(i)} = \vec{0} \tag{2.14}$$

lösen. Für λ_1 finden wir (nachdem wir den Eigenvektor normieren)

$$\frac{a^5\rho_0}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{v}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,. \tag{2.15}$$

Da λ_2 und λ_3 entartet sind, hat dieser Eigenwert einen zweidimensionalen Eigenraum und wir können zwei linear unabhängige Eigenvektoren finden, die wir aber noch orthogonalisieren und normieren müssen. Für λ_2 erhalten wir

$$\frac{a^5\rho_0}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} -v_2^{(2)} - v_3^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix}\,, \tag{2.16}$$

und natürlich das Gleiche für λ_3. Die Eigenvektoren haben jeweils noch zwei Parameter, von denen wir jeweils einen durch die Normierung festlegen können. Der letzte freie Parameter entspricht gerade der Möglichkeit,

die Richtung eines der beiden Vektoren im Eigenraum (also in der Ebene senkrecht zur $\vec{v}^{(1)}$) frei zu wählen. Eine mögliche Wahl ist zum Beispiel $v_3^{(2)} = -v_2^{(2)}$. Dies führt dann auf

$$\vec{v}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad \vec{v}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{2.17}$$

Natürlich kann man dies auch anders wählen.

(d) [1 Punkt] *Drehimpuls für Rotation um die Diagonale*
Die Hauptdiagonale ist parallel zur Richtung von $\vec{v}^{(1)}$. Eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega_2 \vec{v}^{(1)} \tag{2.18}$$

entspricht einem Drehimpuls von

$$\vec{M} = I\vec{\omega}_2 = \lambda_1 \vec{\omega}_2 = \frac{8}{45} a^5 \rho_0 \vec{\omega}_2 \, . \tag{2.19}$$

Hier sind die Winkelgeschwindigkeit und der Drehimpuls zueinander parallel, da hier der Würfel um eine der Hauptträgheitsachsen rotiert.

Lösung der Aufgabe 3

(a) [4 Punkte] *Berechnung des Trägheitstensors*
Die Symmetrie des Problems legt nahe, Zylinderkoordinaten zu benutzen. Die Massendichte des Kegels lautet

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 \theta(x_3)\theta(h - x_3)\theta\left(\frac{x_3}{h} - \frac{r}{R}\right) , \tag{3.1}$$

wobei $\rho_0 = \frac{M}{V}$ und das Volumen des Kegels ist $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$.
Die Massendichte ist symmetrisch unter Rotationen um die x_3-Achse, was bedeutet, dass der Trägheitstensor unabhängig von der Orientierung der x_1- und x_2-Achsen sein muss. Darum müssen die Nebendiagonalelemente verschwinden. Um dies zu zeigen, nehmen wir zum Beispiel die Matrix für eine 90° Drehung um die x_3-Achse,

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \tag{3.2}$$

transformieren den Trägheitstensor damit und erhalten so

$$J' = RJR^{-1} = \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} & -J_{23} \\ -J_{12} & J_{11} & J_{13} \\ -J_{23} & J_{13} & J_{33} \end{pmatrix} . \tag{3.3}$$

Indem wir jetzt $J' = J$ fordern, folgt sofort $J_{11} = J_{22}$ und $J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0$.
Alternativ können wir das Verschwinden der Nebendiagonalelemente natürlich auch explizit zeigen, indem wir die φ-Integration betrachten:

$$J_{12} \sim \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin\varphi \cos\varphi = \left[-\frac{\cos^2(\varphi)}{2} \right]_{\varphi=0}^{2\pi} = 0 \,, \tag{3.4}$$

$$J_{13} \sim \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \cos\varphi = [\sin\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = 0 \,, \tag{3.5}$$

$$J_{23} \sim \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin\varphi = [-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = 0 \,. \tag{3.6}$$

Um die übrigen Komponenten des Trägheitstensors zu finden, berechnen wir

$$\begin{aligned} J_{11} &= \rho_0 \int_0^h \mathrm{d}x_3 \int_0^{x_3 R/h} \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, r \left[r^2 \sin^2\varphi + x_3^2 \right] \\ &= \rho_0 \int_0^h \mathrm{d}x_3 \int_0^{x_3 R/h} \mathrm{d}r \, \left[r^3 \pi + 2\pi x_3^2 r \right] \\ &= \rho_0 \int_0^h \mathrm{d}x_3 \, \left[\frac{\pi x_3^4 R^4}{4h^4} + \frac{\pi x_3^4 R^2}{h^2} \right] \\ &= \rho_0 \pi \left[\frac{h R^4}{20} + \frac{h^3 R^2}{5} \right] \\ &= 3M \left[\frac{R^2}{20} + \frac{h^2}{5} \right] , \end{aligned} \tag{3.7}$$

und analog für J_{33}

$$\begin{aligned} J_{33} &= \rho_0 \int_0^h \mathrm{d}x_3 \int_0^{x_3 R/h} \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, r \left[r^2 \sin^2\varphi + r^2 \cos^2\varphi \right] \\ &= 2\pi\rho_0 \int_0^h \mathrm{d}x_3 \int_0^{x_3 R/h} \mathrm{d}r \, r^3 \\ &= 2\pi\rho_0 \int_0^h \mathrm{d}x_3 \, \frac{x_3^4 R^4}{4h^4} \\ &= \frac{\pi\rho_0 R^4}{2h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{\pi\rho_0 R^4 h}{10} \\ &= \frac{3MR^2}{10} \,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Somit lautet der gesamte Trägheitstensor

$$J = \frac{3M}{20} \begin{pmatrix} R^2 + 4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + 4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix} . \tag{3.9}$$

(b) 4 Punkte *Berechnung der kinetischen Energie*
Die kinetische Energie eines starren Körpers in einem Inertialsystem ist

durch

$$T = \frac{1}{2}M\vec{v}_O^2 + (\vec{v}_O \times \vec{\omega}) \cdot \vec{R} + \frac{1}{2}\vec{\omega}^\mathsf{T} J \vec{\omega} \tag{3.10}$$

gegeben, wobei wir die Geschwindigkeit des Ursprungs des körperfesten Systems im Laborsystem mit $\vec{v}_O$ bezeichnen. Die Position des Massenschwerpunkts im körperfesten System ist $\vec{R}$ und $\vec{\omega}$ ist die Winkelgeschwindigkeit. Der zweite Term mischt Größen, die jeweils die lineare Bewegung und die Rotation beschreiben. Wir können diesen Term loswerden, indem wir entweder den Schwerpunkt als Ursprung des körperfesten Systems wählen (denn dann ist $\vec{R} = \vec{0}$) oder indem wir das körperfeste System so wählen, dass sein Ursprung im Inertialsystem ruht (da dann $\vec{v}_O = \vec{0}$ ist). Mit der zweiten Wahl eliminieren wir gleichzeitig auch den ersten Term. Da die zweite Option hier sehr leicht möglich ist, nutzen wir diese und wählen die Spitze des Kegels, die sowohl im körperfesten System als auch im Inertialsystem ruht, als Ursprung des körperfesten Systems. Somit müssen wir nur die Rotationsenergie der Bewegung berechnen, um die gesamte kinetische Energie zu erhalten.
Zu jedem Zeitpunkt rotiert der Kegel um die Achse, die durch die Kontaktlinie zwischen Kegel und Ebene gegeben ist. Wir wählen wie gesagt die Spitze des Kegels als Ursprung des körperfesten Systems und nutzen das Argument, dass die kinetische Energie wie ein Skalar unter Rotationen transformiert (sie ändert sich nicht) und dass das körperfeste System und das Laborsystem zu einem festen Zeitpunkt über eine konstante Rotation miteinander verbunden sind, um die Rotationsenergie im körperfesten System zu berechnen. In diesem System ist die Rotationsachse durch

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

gegeben und so erhalten wir für das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse $\hat{n}$

$$J_{\hat{n}} = \hat{n}^\mathsf{T} J \hat{n} = \frac{3M}{20}\left((R^2 + 4h^2)\sin^2\alpha + 2R^2\cos^2\alpha\right) = \frac{3MR^2}{20}(1 + 5\cos^2\alpha)\,, \tag{3.12}$$

wobei wir genutzt haben, dass $\sin^2\alpha = \frac{R^2}{R^2+h^2}$ und $\cos^2\alpha = \frac{h^2}{R^2+h^2}$. Die Bedingung, dass der Kegel auf der Ebene rollt, führt auf

$$h\dot{\phi} = R\omega \qquad\qquad \Leftrightarrow \omega = \frac{h\dot{\phi}}{R}\,. \tag{3.13}$$

Damit finden wir

$$T = \frac{1}{2}J_{\vec{n}}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{3MR^2}{20}(1 + 5\cos^2\alpha)\frac{h^2\dot{\phi}^2}{R^2} = \frac{3M}{40}h^2\dot{\phi}^2(1 + 5\cos^2\alpha) \tag{3.14}$$

für die kinetische Energie.