Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Fedele, M. Egner

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1773210& client_id=produktiv

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 1

Sommersemester 2022

Abgabe: 22.04.2022
Besprechung: 26.04.2022

Aufgabe 1: Erhaltungssätze
Auf einen Massenpunkt wirke die angegebene zeitunabhängige Kraft $\vec{F}$. Geben Sie jeweils an, ob (i) Energie, (ii) Impuls oder (iii) Drehimpuls erhalten sind. $\vec{r}$ ist der Ortsvektor. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) (3 Punkte) $\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)\vec{r}$ mit stetig differenzierbarem $f(r) \neq 0$

b) (3 Punkte) $\vec{F}(\vec{r}) = -g\vec{e}_z$ mit $g \neq 0$. $\vec{e}_z := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) (3 Punkte) $\vec{F}(\vec{r}) = -\alpha\dot{\vec{r}}$ mit $\alpha > 0$

d) (1 Punkt) Betrachten Sie die Kraft aus (a) nun in einem um $\vec{R}$ verschobenen Koordinatensystem, $\vec{F}(\vec{r}) = f(|\vec{r} - \vec{R}|)(\vec{r} - \vec{R})$. Ist der Drehimpuls erhalten?

Aufgabe 2: Kepler-Problem
Die ebenen Polarkoordinaten eines Himmelskörpers auf einer elliptischen Bahn um die Sonne seien (r, ϕ), wobei $\phi = 0$ den sonnennächsten Punkt charakterisiert, der zum Zeitpunkt $t = 0$ durchlaufen werde. Die Bahnkurve ist

$$r(\phi) \quad = \quad \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\phi}, \tag{1}$$

wobei a die große Halbachse und ϵ die Exzentrizität der Ellipse ist. Die kleine Halbachse ist $b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$. Das zweite Keplersche Gesetz besagt, dass für die im Intervall $[0, t]$ vom Ortsvektor überstrichene Fläche gilt:

$$A(\phi(t)) = \frac{1}{2}\int_0^{\phi(t)} d\phi' \, \left(r(\phi')\right)^2 \quad = \quad kt \tag{2}$$

mit einem konstanten $k = \pi ab/\tau$, wobei τ die Umlaufzeit des Himmelskörpers ist. Setzt man Gl. (1) in Gl. (2) ein und löst dann Gl. (2), so erhält man die *Keplerscher Zeitgleichung*, die $\phi(t)$ und über Gl. (1) dann auch $r(t)$ bestimmt. Wir bestimmen $\phi(t)$ in einer Entwicklung in ϵ.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie $\phi^{(0)}(t) =: \omega t$, das Gl. (2) für $\epsilon = 0$ löst, d.h. drücken Sie ω durch k und a aus.

b) (2 Punkte) Wir definieren $\phi(t) := \phi^{(0)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \delta\phi^{(n)}(t)$ und $\phi^{(n)}(t) = \phi^{(0)}(t) + \sum_{l=1}^{n} \epsilon^l \delta\phi^{(l)}(t)$. Entwickeln Sie den Integranden in Gl. (2) (mit $r(\phi)$ aus Gl. (1)) zur Ordnung ϵ^2 und lösen Sie das Integral, um $A(\phi)$ als Funktion von ϕ zur Ordnung ϵ^2 zu finden.

c) (2 Punkte) Setzen Sie $\phi^{(1)}(t)$ in die Gleichung für $A(\phi)$ ein und vernachlässigen Sie alle Terme der Ordnung ϵ^2 und höher. Bestimmen Sie so $\phi^{(1)}(t)$.

d) (3 Punkte) Bestimmen Sie $\phi^{(2)}(t)$. Schreiben Sie das Ergebnis als Linearkombination von ωt, $\sin(\omega t)$ und $\sin(2\omega t)$, d.h. eliminieren Sie Terme wie $\cos^2(\omega t)$ etc.

e) (2 Punkte) Für die Erdbahn ist $\epsilon = 0.0167$, $a = 1.496 \cdot 10^{11}$ Meter und $\tau = 1$ Jahr $= 365.25636$ Tage. Wann wird $\left|\phi^{(1)}(t) - \phi^{(0)}(t)\right|$ maximal und was ist der zugehörige Unterschied $\phi^{(1)}(t) - \phi^{(0)}(t)$?