Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Fedele, M. Egner

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1773210& client_id=produktiv

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 2

Sommersemester 2022

Abgabe: 29.04.2022
Besprechung: 03.05.2022

Aufgabe 3: Rutherford Streuung (20 Punkte)

Wir betrachten die Streuung eines Teilchens in einem abstoßenden Zentralpotential, siehe Abbildung 1. Das Teilchen läuft aus dem Unendlichen auf das Potentialzentrum im Ursprung des Koordinatensystems zu, erreicht einen Punkt (das sog. Perihel) mit minimalen Abstand ρ_{min}, und läuft wieder ins Unendliche aus. Dabei wird das Teilchen um den Winkel θ abgelenkt, den sog. *Streuwinkel*. Die Bahnkurve ist symmetrisch bzgl. der Geraden die durch den minimalen Abstand definiert wird.

Die Bahnkurve kann formal aus Energie- und Drehimpulserhaltung hergeleitet werden. Der Streuwinkel kann dann eindeutig in Abhängigkeit von Energie und Drehimpuls bestimmt werden. Beide Größen können durch die Geschwindigkeit v_0 bei $t = -\infty$ (die Anfangsgeschwindigkeit) und den *Stoßparameter* b ausgedrückt werden (letzterer ist die Länge des Lots vom Streuzentrum auf die Richtung von v_0). Für gegebenes Potential $V(r)$ kann also der Streuwinkel eindeutig durch v_0 und b bestimmt werden.

a) (3 Punkte) Drücken Sie Gesamtenergie E und z-Komponente l_z des Drehimpulses eines Teilchens mit Masse μ in ebenen Polarkoordinaten (ρ, ϕ) aus (achten Sie auf die Vorzeichen!).

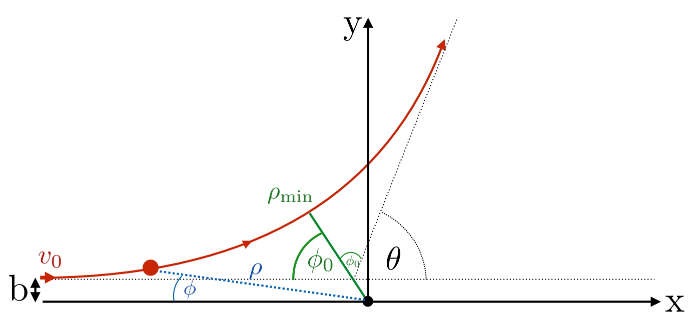

Abbildung 1: Streuung an einem abstoßenden Zentralpotential.

b) (5 Punkte) Die Erhaltung von Gesamtenergie und Drehimpuls führt zu zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung für den Abstand $\rho(t)$ und den Winkel $\phi(t)$ als Funktion von E und l_z. Kombinieren Sie diese Gleichungen um einen formalen Ausdruck für die Bahnkurve $\phi(\rho)$ herzuleiten, wobei Sie als Randbedingung das Perihel benutzen, $\phi(\rho_{\min}) = \phi_0$. Leiten Sie schließlich eine Gleichung für den Streuwinkel θ her, indem Sie die Bahnkurve bei $t = +\infty$ auswerten und den Winkel ϕ_0 durch θ ausdrücken.

c) (6 Punkte) Für ein abstoßendes Potenzial $V(r) = \alpha/r, \alpha > 0$ kann der minimale Abstand $\rho_{\min}$ zwischen Teilchen und Streuzentrum durch die Gesamtenergie E, den Drehimpuls l_z, die Masse μ und α ausgedrückt werden (benutzen Sie $\dot{\rho}(\rho_{\min}) = 0$). Führen Sie die Integration aus und vereinfachen Sie, um die Lösung für den Streuwinkel θ als Funktion von E, l_z, μ, α zu erhalten. Drücken Sie schließlich E und l_z durch den Stoßparameter b und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus indem Sie die Werte bei $t = -\infty$ berechnen, und geben Sie θ als Funktion von α, μ, v_0 und b an.

Hinweis: Nützlich sind die Formeln

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = -\frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \frac{2Ax + B}{\sqrt{-\Delta}}\,, \qquad \text{wenn } \Delta = 4AC - B^2 < 0, A < 0\,.$$

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \arctan x\,.$$

In vielen physikalischen Anwendungen muss man die Streuung eines ganzes Strahles gleichartiger Teilchen an einem Streuzentrum betrachten. Verschiedene Teilchen des Strahls haben verschiedene Stoßparameter und werden unter verschiedenen Winkeln θ gestreut. Der Streuprozess wird mit dem Begriff des (differentiellen) *Wirkungsquerschnitts* beschrieben, der z.B. in der Teilchenphysik eine zentrale Rolle spielt (wo solche Streuprozesse quantenmechanisch beschrieben werden müssen; die hier eingeführten Begriffe sind aber dieselben).

Wir bezeichnen mit dN den Strom gestreuter Teilchen in den Raumwinkel $d\Omega$, d.h. die Anzahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreut werden, und mit I die Stromdichte des einlaufenden Strahls, d.h. die Anzahl der einfallenden Teilchen pro Zeit und Fläche des Strahlquerschnitts. Der differenzielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ ist definiert als das Verhältnis des Stroms gestreuter Teilchen pro $d\Omega$ zu der Stromdichte der einlaufenden Teilchen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN}{I\,d\Omega} = \frac{\text{Auslaufender Teilchenstrom pro } d\Omega}{\text{Einfallende Teilchenstromdichte}}\,. \tag{1}$$

Der (totale) Wirkungsquerschnitt σ ist das Integral des differenziellen Wirkungsquerschnitts über den gesamten Raumwinkel:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \frac{d\sigma}{d\Omega}\,. \tag{2}$$

Die Gesamtzahl N der gestreuten Teilchen pro Zeit ist also gerade gegeben durch $I\sigma$, daher kann σ als die Fläche interpretiert werden, an der die einfallende Teilchenstromdichte I effektiv gestreut wird.

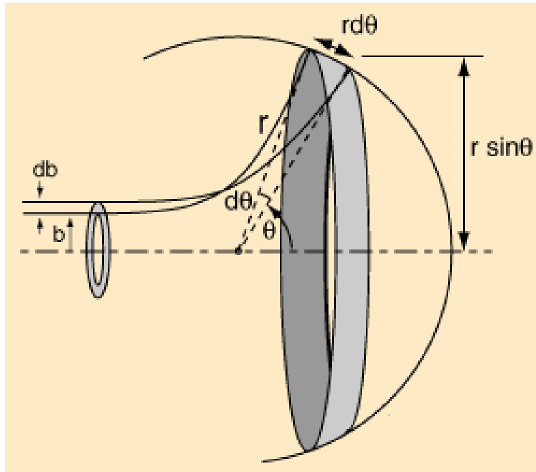

Abbildung 2: Streuung an einem abstoßenden Zentralpotential.

Alle einfallenden Teilchen haben dieselbe Masse μ und dieselbe Energie (dieselbe Anfanggeschwindigkeit v_0) aber verschiedene Stoßparameter b, deshalb kann im Fall des Zentralpotentials der Streuwinkel θ eines gestreuten Strahlteilchens nur von seinem Stoßparameter b abhängen. Alle einlaufenden Teilchen in einem infinitesimal kleinen Kreisring zwischen $b + db$ und b werden in einen infinitesimal kleinen Raumwinkelbereich zwischen $\theta + d\theta$ gestreut (siehe obige Skizze). Indem wir den Betrag dieser einlaufenden und auslaufenden Teilchenströme gleichsetzen (die Teilchenzahl ist erhalten)

$$2\pi I\, b|db| = 2\pi I\, \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta |d\theta|\,, \tag{3}$$

und b als Funktion von θ auffassen, erhalten wir für den differenziellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|\,. \tag{4}$$

d) (3 Punkte) Drücken Sie den Stoßparameter b aus Aufgabe **c)** als Funktion des Streuwinkels θ aus und bestimmen Sie den differenziellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$.

e) (3 Punkte) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ für eine Streuung mit Streuwinkel $\theta_{\min} \leq \theta \leq \pi$. Was passiert für $\theta_{\min} \to 0$?