Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Fedele, M. Egner

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1773210& client_id=produktiv

Klassische Theoretische Physik II

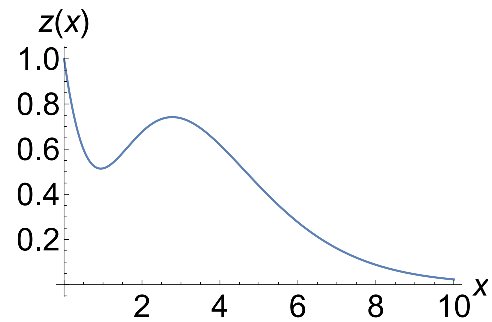
Übungsblatt 3

Sommersemester 2022

Abgabe: 6.5.2022
Besprechung: 10.5.2022

Aufgabe 4: Zwangskraft (10 Punkte)

Wir betrachten eine Bewegung eines Massenpunktes mit Masse m in der (x, z)-Ebene mit Zwangsbedingung $z = z(x)$ zu einer vorgegebenen Funktion $z(x)$ und Potential $V(z) = mgz$. Die Abbildung zeigt ein Beispiel. Kennen wir eine Lösung $\vec{r}(t) := (\, x(t), z(x(t))\,)$ der Newtonschen Bewegungsgleichung, so können wir mithilfe von



$$\vec{Z} = m\ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla}V \; = m\ddot{\vec{r}} + mg\vec{e}_z \tag{1}$$

die Zwangskraft $\vec{Z}$ berechnen, die die durch $z(x)$ definierte Fläche auf den auf ihr gleitenden Massenpunkt ausübt. Die Kenntnis von Z ist wichtig, um z.B. Schienensysteme (Achterbahn, Warenverteilungssystem) stabil zu konstruieren oder um zu berechnen, wann der Massenpunkt sich von der Fläche löst, was z.B. beim abgebildeten Fall abhängig von der Geschwindigkeit in der Nähe des lokalen Maximums von $z(x)$ passieren kann.
In der Praxis kann man zwar $\dot{\vec{r}}(t)$ einfach berechnen, die Integration zur Bestimmung von $\vec{r}(t)$ ist i.d.R. jedoch nicht möglich. In dieser Aufgabe leiten wir eine Formel her, die $\vec{Z}$ als Funktion von x bestimmt, ohne dafür $\vec{r}(t)$ kennen zu müssen.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dz}{dx} \end{pmatrix} \tag{2}$$

b) (2 Punkte) Der Massenpunkt habe die Gesamtenergie E. Zeigen Sie (für eine Bewegung nach rechts, also $\dot{x} \geq 0$):

$$\dot{x} = \hat{f}(x) \qquad \text{mit} \;\; \hat{f}(x) = \sqrt{\frac{2}{m} \frac{E - V(z(x))}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \tag{3}$$

c) (3 Punkte) Zeigen Sie für die x-Komponente von $\vec{Z}$:

$$\begin{aligned} Z_x &= m\ddot{x} = m\dot{x}\frac{d\hat{f}}{dx} \qquad (1 \text{ Punkt}) \\ &= \frac{df(x)}{dx} \qquad \text{mit} \quad f(x) = \frac{m}{2}\hat{f}^2 = \frac{E - V(z(x))}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

d) (2 Punkte) Begründen Sie, warum der Geschwindigkeitsvektor $(\dot{x}, \dot{z})^T$ senkrecht auf $\vec{Z}$ steht. Nutzen Sie diese Eigenschaft, um Z_z durch Z_x und $\frac{dz}{dx}$ auszudrücken.

e) (2 Punkte) Überprüfen Sie Ihre Formel für $\vec{Z}$ anhand der Bewegung auf einer schiefen Ebene, $z(x) = -ax$, $a > 0$, für $\vec{r}(0) = (0, 0)$ und $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$:

(i) Bestimmen Sie $(m\ddot{x}, m\ddot{z})$ und $\vec{Z}$ aus der Betrachtung des Kräfteparallelogramms und Gl. (1).

(ii) Bestimmen Sie $\vec{Z}$ aus Gl. (4) und dem Ergebnis aus (d).

Aufgabe 5: Paketrutsche (10 Punkte)

Wir betrachten eine reibungsfreie Paketrutsche $z(x)$ mit $z(0) = h$ und $z(2h) = 0$:

$$z(x) = h\left(1 - \frac{x}{2h}\right)\left(1 - a\frac{x}{h}\right) \tag{5}$$

mit $a \geq \frac{1}{2}$.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Minimum von $z(x)$. In welche Richtung zeigt $\vec{Z}$ am Minimum?

b) (3 Punkte) Welche kinetische Energie hat ein Paket mit Masse m, das bei $(x, z) = (0, h)$ die Anfangsgeschwindigkeit 0 hatte, am Minimum der Rutsche?

c) (5 Punkte) Berechnen Sie Z_z am Minimum für das Paket aus b). Welche Beschleunigung erfährt es dort und für welches $\alpha \in [1/2, \infty]$ wird sie minimal?