Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Fedele, M. Egner

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1773210& client_id=produktiv

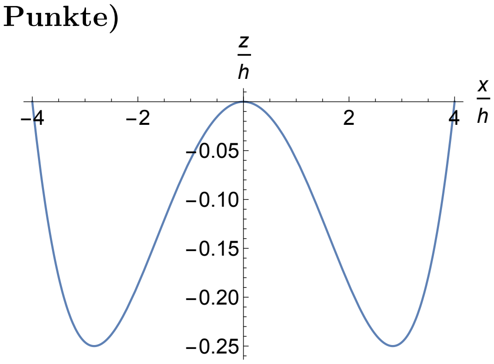
Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 4

Sommersemester 2022

Abgabe: 13.05.2022
Besprechung: 17.05.2022

Aufgabe 6: Zwangskraft und Skateboardbahn (7 Punkte)



Wir betrachten wie in Aufgabe 4 eine reibungsfreie Bewegung eines Massenpunktes mit Masse m in der (x, z)-Ebene mit Zwangsbedingung $z = z(x)$ zu einer vorgegebenen Funktion $z(x)$ und Potential $V(z) = mgz$. Wir legen die z-Achse so, dass $z(0) = 0$ ist.

a) (3 Punkte) Für $z = 0$ habe der Massenpunkt die kinetische Energie T_0 (und die potentielle Energie 0). Wir definieren $z_0 = T_0/(mg)$. Zeigen Sie, dass für die z-Komponente Z_z der Zwangskraft gilt:

$$Z_z = \frac{mg}{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^2} \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2(z_0 - z)\frac{d^2 z}{dx^2}\right]. \tag{1}$$

Hinweis: Sie dürfen sich auf die Lösungen der Aufgaben 4 und 5 beziehen.

b) (4 Punkte) Die Skateboardbahn „Peter Higgs“ habe das Höhenprofil

$$z(x) = h\left[-\frac{1}{16}\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \frac{1}{256}\left(\frac{x}{h}\right)^4\right]$$

mit einer Längenskala h (siehe Abbildung). Eine Skateboarderin (durch einen reibungsfreien Massenpunkt mit Masse m approximiert) bewege sich von links nach rechts und habe bei $(x, z) = (-4{,}0)h$ die kinetische Energie $T_0 = \dfrac{8215}{1280}mgh$.

(i) An welchem Punkt (x_1, z_1) hebt sie ab? (1 Punkt)
(ii) Berechnen Sie die ballistische Bahnkurve für $x \geq x_1$. (2 Punkte)
(iii) Wo berührt sie den Boden wieder? (1 Punkt)

Aufgabe 7: Hebebühne (10 Punkte) Der Azubi Franz Furchtlos bewegt sich auf einer Hebebühne im Schwerefeld der Erde, die Erdbeschleunigung ist $-g\vec{e}_z$. Die Hebebühne bewegt sich mit Geschwindigkeit[1]

$$\vec{v} = \begin{cases} (0{,}0,\alpha t(T-t))^T & \text{für} \quad 0 \le t \le T \\ (0{,}0{,}0)^T & \text{für} \quad t \le 0 \quad \text{oder} \quad t \ge T. \end{cases}$$

mit $\alpha, T > 0$. Der Ortsvektor von Franz' Körperschwerpunkt sei $\vec{r} = (x,y,z)^T$, seine Masse sei m und die x- und y-Komponenten v_x und v_y seiner Geschwindigkeit seien konstant.
In den Teilaufgaben (a) bis (c) nehmen wir zudem $\alpha T \le g$ an.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ zur Anfangsbedingung $\vec{r}(0) = 0$, $\dot{\vec{r}}(0) = (v_x, v_y, 0)^T$ und berechnen Sie $z(T)$. Schreiben Sie die Zwangsbedingung, das Franz auf der Hebebühne steht, in der Form $f(x,y,z,t) = 0$, d.h. bestimmen Sie f.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t)$, stellen Sie die Newton'sche Kraftgleichung $m\ddot{\vec{r}}(t) = -mg\vec{e}_z + \vec{Z}$ auf und bestimmen Sie daraus im Intervall $0 \le t \le T$ die Zwangskraft $\vec{Z}(t)$, die die Hebebühne auf Franz ausübt. Überprüfen Sie, ob $\vec{Z} \propto \vec{\nabla} f$ ist, die Zwangskraft also senkrecht auf der durch die Zwangsbedingung definierten Fläche steht.

c) (1 Punkte) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?
(i) $\vec{Z}$ verrichtet keine Arbeit.
(ii) $\vec{Z}$ verrichtet Arbeit an Franz.
Falls Sie sich für (ii) entscheiden, bestimmen Sie die Arbeit. Zeichnen Sie die Bahnkurve für $v_x > 0$, $v_y = 0$. Steht $\vec{Z}$ senkrecht auf der Bahnkurve?

d) (2 Punkte) Ab jetzt betrachten wir den Fall, dass die Hebebühne von Franz' misanthropischem Kollegen Max Mobber bedient wird, der $\alpha T > g$ wählt.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_0 im Intervall $0 < t_0 < T$, mit $\vec{Z}(t_0) = 0$. Was passiert für $t > t_0$?.

e) (3 Punkte) Berechnen Sie den Zeitpunkt $t_1 > t_0$, zu dem Franz wieder auf der Hebebühne aufkommt. Unterscheiden Sie die Fälle $t_1 \le T$ und $t_1 > T$.
Hinweise: Vergessen Sie nicht, dass sich die Hebebühne für $t_0 \le t \le T$ weiter bewegt. Es ist hilfreich, zunächst den Zeitpunkt zu berechnen, zu dem Franz den Scheitelpunkt seiner Bahn erreicht, und mit T zu vergleichen.

Aufgabe 8: Bewegung im Schwerefeld (3 Punkte)

Die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse m im Schwerefeld $V(z) = mgz$ sei auf die Bahn $z = cx^2/2$ eingeschränkt ($c \neq 0$).

a) (1 Punkt) Berechnen Sie aus der Zwangsbedingung die Größen $\dot{z}(t)$ und $\ddot{z}(t)$, ausgedrückt durch $x, \dot{x}, \ddot{x}$.

b) (1 Punkt) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf. Wählen Sie dabei x als verallgemeinerte Koordinate.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichung für $x(t)$.

[1] Das an einem Vektor hochgestellte T bedeutet „transponiert“ und darf nicht mit der Zeit T verwechselt werden.