Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Fedele, M. Egner

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1773210& client_id=produktiv

---

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 5

Sommersemester 2022

Abgabe: 20.05.2022
Besprechung: 24.05.2022

Aufgabe 9: Massenpunkt in verschiedenen Potentialen (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lagrangefunktionen und die Euler-Lagrange-Gleichungen zu den folgenden mechanischen Systemen:

a) (3 Punkte) Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich in der (x, y)-Ebene im Potenzial $V(x, y)$ bzw. $V(r, \phi)$. Betrachten Sie das Problem in kartesischen Koordinaten und ebenen Polarkoordinaten.

b) (3 Punkte) Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich in der (x, y)-Ebene im Potenzial $V(x, y) = k(x^2 + y^2)$ mit $k > 0$ (harmonischer Oszillator in zwei Dimensionen). Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen in kartesischen Koordinaten mit allgemeinen Anfangsbedingungen.

Hinweis: Schreiben Sie die Lösungen in Matrix-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} ,$$

mit einer 2×2 Matrix M. Dann können Sie die sogenannte *Singulärwertzerlegung* benutzen, die besagt, dass eine beliebige reelle Matrix M geschrieben werden kann als

$$M = O_L \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} O_R^T ,$$

wobei O_L und O_R orthogonale 2×2 Drehmatrizen sind ($O_R^T = O_R^{-1}$ bezeichnet hier das Transponierte von O_R):

$$O_L = \begin{pmatrix} \cos\alpha_L & \sin\alpha_L \\ -\sin\alpha_L & \cos\alpha_L \end{pmatrix} , \qquad O_R = \begin{pmatrix} \cos\alpha_R & \sin\alpha_R \\ -\sin\alpha_R & \cos\alpha_R \end{pmatrix} .$$

Die 4 Parameter A, B, α_L, α_R können aus den 4 Einträgen der Matrix M bestimmt werden, aber dies ist hier nicht nötig. Berechnen Sie die Wirkung von O_R^T auf den Vektor $(\cos\omega t, \sin\omega t)^T$ und vereinfachen Sie mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme. Sie können nun die Bahnform im gedrehten Koordinatensystem (x', y') bestimmen, das definiert ist durch

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = O_L^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

c) (4 Punkte) Ein Teilchen der Masse m gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft $-mg\vec{e}_z$ auf der Innenfläche eines Kegels mit dem halben Öffnungswinkel α, dessen Symmetrieachse die z-Achse ist. Benutzen Sie als verallgemeinerte Koordinaten die Zylinderkoordinaten z und φ. Die Bewegungsgleichung muss nicht gelöst werden.

Aufgabe 10: Paketrutsche (10 Punkte)

Eine schraubenlinienförmige Paketrutsche mit Höhe h und Radius R werde durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ h\left(1 - \dfrac{\phi}{2\pi}\right) \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \tag{1}$$

parametrisiert. Auf ein rutschendes Paket mit Masse m wirke die Schwerkraft $-mg\vec{e}_z$ und die Stokes'sche Reibungskraft $\vec{F}_R = -\alpha\dot{\vec{r}}$ mit $\alpha > 0$.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die generalisierte Kraft $Q = \vec{F}_R \cdot \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ als Funktion von ϕ und $\dot{\phi}$. Zeigen Sie, dass es kein geschwindigkeitsabhängiges Potential $U(\phi, \dot{\phi})$ mit $Q = -\dfrac{\partial U}{\partial \phi} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{\phi}}$ gibt.

b) (2 Punkt) Bestimmen Sie die Lagrange'sche Bewegungsgleichung $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = Q$.

c) (2 Punkte) Lösen Sie die Bewegungsgleichung, um $\phi(t)$ zur Anfangsbedingung $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$ zu finden.

d) (4 Punkte) Betrachten Sie nun den Grenzfall $\alpha \to 0$. Welche Zwangskraft $\vec{Z}$ übt die Rutsche auf das Paket aus? Geben Sie das Ergebnis für $\vec{Z}$ als Funktion von ϕ an. Schreiben Sie $\vec{Z} = Z_\rho \vec{e}_\rho + Z_\phi \vec{e}_\phi + Z_z \vec{e}_z$ mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho = (\cos\phi, \sin\phi, 0)^T$, $\vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)^T$ und $\vec{e}_z = (0,0,1)^T$ der Zylinderkoordinaten. Um die Paketrutsche stabil zu konstruieren, benötigt man das Maximum von $|\vec{Z}|$. Bei welchem ϕ wird es erreicht und welchen Wert hat das maximale $|\vec{Z}|$?