Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Fedele, M. Egner

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1773210& client_id=produktiv

Klassische Theoretische Physik II

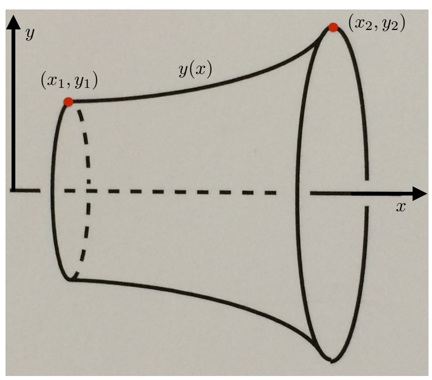
Übungsblatt 7

Sommersemester 2022

Abgabe: 3.6.2022
Besprechung: 14.6.2022

Aufgabe 13: Minimale Rotationsfläche (10 Punkte)

Betrachten Sie die Rotationsfläche, die durch Rotation einer Kurve mit zwei festen Endpunkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) um die x-Achse erzeugt wird. Ziel der Aufgabe ist die Bestimmung derjenigen Kurve $y(x)$, für die die so erzeugte Oberfläche minimal wird.



a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Manteloberfläche S der Rotationsfigur bei vorgegebener Funktion $y(x)$ gegeben ist durch

$$S[y(x)] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(x, y(x), y'(x))\,, \qquad F(x, y(x), y'(x)) = \, y(x)\,\sqrt{1 + y'^2(x)}\,.$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Größe $K = F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}$ für die gesuchte Mininalfläche konstant (unabhängig von x) ist, indem Sie die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,, \qquad (1)$$

benutzen.

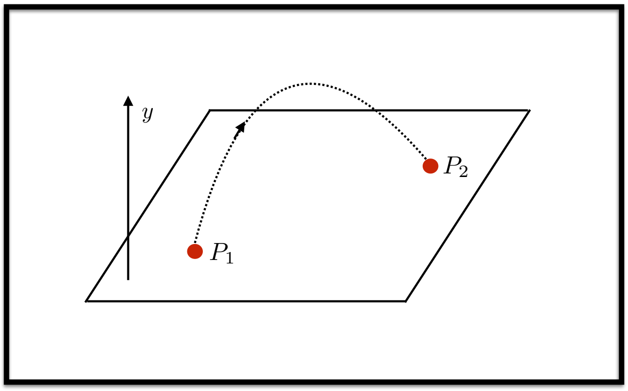
c) (2 Punkte) Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe (b) um einen Integralausdruck (der von der Konstanten K abhängt) für die Funktion $x(y)$ zu erhalten.

d) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Funktion $y(x)$, ohne die Integrationskonstanten explizit auszurechnen oder zu zeigen, dass die gefundene stationäre Lösung ein Minimum ist.

Hinweis: Benutzen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \operatorname{arccosh} z$.

Aufgabe 14: Brechungsindex (10 Punkte)

Nehmen Sie an dass die Lichtgeschwindigkeit c in einer Materialplatte proportional zu der Höhe über der Grundfläche ist, $c(y) = \alpha y$. Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass sich in diesem Fall das Licht zwischen zwei Punkten P_1, P_2 mit Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_1) auf Kreisbögen bewegt (gemäß dem Fermat'schen Prinzip bewegt sich das Licht auf dem Weg, für das es die kürzeste Zeit braucht).



a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Zeit, die das Licht von P_1 nach P_2 braucht, gegeben ist durch

$$T[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(x, y(x), y'(x)), \qquad F(x, y(x), y'(x)) = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}. \tag{2}$$

b) (3 Punkte) Benutzen Sie die Konstanz von $K = F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}$, um einen Integralausdruck für die Funktion $x(y)$ zu erhalten.

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Funktion $y(x)$, indem Sie das Integral lösen, und zeigen Sie dass $y(x)$ einen Kreisbogen beschreibt, dessen Mittelpunkt in der $y = 0$ Ebene liegt.