Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Fedele, M. Egner

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1773210& client_id=produktiv

Klassische Theoretische Physik II

Übungsblatt 8

Sommersemester 2022

Abgabe: 17.6.2022
Besprechung: 21.6.2022

Aufgabe 15: Variationsrechnung – Tunnelproblem (10 Punkte)
Betrachten Sie ein schnelles Transportsystem zwischen zwei Punkten A und B auf der Erdoberfläche, das aus einem reibungsfreien Tunnel besteht. Antriebslose Passagierzüge können dadurch nur mit Hilfe der Graviationswirkung zwischen den Punkten A und B pendeln. Bestimmen Sie die Differentialgleichung der Bahnkurve, für die die Transitzeit der Reise von Punkt A nach Punkt B minimal ist und bestimmen Sie diese. Arbeiten Sie dabei mit Kugelkoordinaten und vernachlässigen Sie die Einflüsse der Erddrehbewegung.

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie zuerst das Potential innerhalb der Erdkugel (mit Radius R) in Abhängigkeit vom Abstand r zum Erdmittelpunkt. Das Potential auf der Erdoberfläche sei auf $V(r = R) = m\,g\,R$ normiert, wobei m die Masse eines Passagierzuges darstellt, und g die Erdbeschleunigung. Stellen Sie die Energieerhaltungsgleichung für den Zug auf und bestimmen Sie seine Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von r.
Hinweis: Die Erde soll als eine Kugel mit homogener Massenverteilung betrachtet werden. Betrachten Sie zunächst die Kraft, da das Potential nur bis auf eine Konstante normiert ist. Finden Sie also zunächst einen Ausdruck für die Kraft im Inneren der Kugel und bestimmen Sie anschließend auch das Potential (inklusiver der benötigten Konstanten) so, dass beide stetig am Punkt $r = R$ sind.

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie das infinitesimale Abstandsquadrat ds^2 in Kugelkoordinaten und bestimmen Sie damit das Integral für die Transitzeit

$$T[r(\phi)] = \int_A^B \frac{ds}{v} \,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass Gleichung (1) in der Form

$$T[r(\phi)] = \int_{\phi_A}^{\phi_B} F(r(\phi), r_\phi(\phi))\, d\phi \,, \qquad F(r, r_\phi) = \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\frac{r^2 + r_\phi^2}{R^2 - r^2}} \tag{2}$$

geschrieben werden kann. Dabei ist r_ϕ die erste Ableitung von r nach ϕ.

c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung für den optimalen Tunnelverlauf $r(\phi)$, die sich aus der Variation der Transitzeit ergibt, in folgende Form bringen läßt ($r_{\phi\phi}$ bedeutet die zweite Ableitung von r nach ϕ):

$$r_{\phi\phi}\, r(r^2 - R^2) + r_\phi^2\,(2R^2 - r^2) + R^2\, r^2 = 0 \,. \tag{3}$$

d) (1 Punkt) Zeigen Sie dass die Größe $F - r_\phi \, \partial F/\partial r_\phi$ für den gesamten Tunnelverlauf konstant ist. Benutzen Sie dazu die Gleichung aus dem Variationsproblem, siehe Glg. (66) der Vorlesung.

e) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Konstante aus (d) aus der Bedingung, dass $r_\phi = 0$ für $r = r_0$, wobei r_0 der minimale Abstand des Tunnels vom Erdmittelpunkt ist. Zeigen Sie, dass sich daraus die Beziehung

$$r_\phi^2 = \frac{R^2 \, r^2}{r_0^2} \, \frac{r^2 - r_0^2}{R^2 - r^2} \tag{4}$$

für r_ϕ ergibt.

f) (2 Punkte) Bestimmen Sie nun die Transitzeit, in dem Sie Gleichung (2) in ein Integral über r umschreiben. Benutzen Sie dazu Relation (4).
Hinweis: Benutzen Sie r^2 als Integrationsvariable und das folgende Integral ($a, b \in \mathbb{R}\,,\ a < b$):

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)\,(b-x)}} = \pi\,.$$

g) (1 Punkt) Bestimmen Sie nun den Minimalabstand r_0 in Abhängigkeit vom Winkelabstand $\phi_{AB} = \phi_B - \phi_A$ der Punkte A und B . Benutzen Sie dazu die Relation (4).
Hinweis: Benutzen Sie wieder r^2 als Integrationsvariable und das folgende Integral ($a, b \in \mathbb{R}\,,\ a < b$):

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} = \pi \, \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}\,.$$

h) (1 Punkt) Wie muss der Tunnel durch die Erde verlaufen? Bestimmen Sie zur Beantwortung der Frage die Bahn $\phi(r)$ durch Integration der Differentialgleichung (4). Nutzen Sie die Symmetrie des Problems, um ϕ geschickt zu definieren.

Aufgabe 16: Explizite Minimierung der Wirkung (10 Punkte) Für den vertikalen Wurf eines Balls unter dem Einfluss der Gravitationskraft $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_y$ machen wir den folgenden Ansatz

$$y(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0\,,$$

mit zu bestimmenden Konstanten a_0, a_1, a_2.

a) (3 Punkte) Bestimmen sie a_0 und a_1 aus den Randbedingungen

$$y(0) = y(T) = 0\,.$$

b) (5 Punkte) Berechnen Sie die Wirkung S zwischen $t = 0$ und $t = T$ als Funktion von m, a_2, g und T .

c) (2 Punkte) Zeigen Sie dass die Wirkung minimal wird für $a_2 = -g/2$.