Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Fedele, M. Egner

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1773210& client_id=produktiv

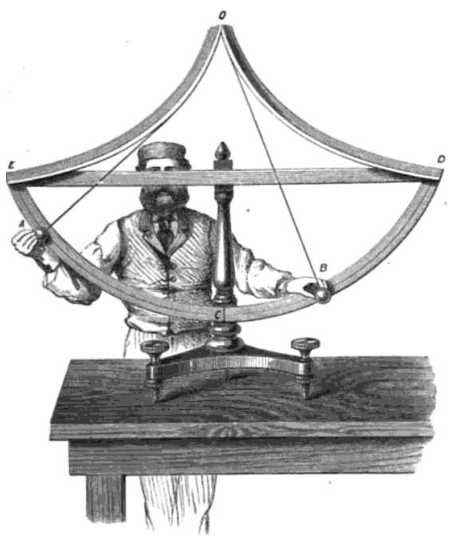
Klassische Theoretische Physik II

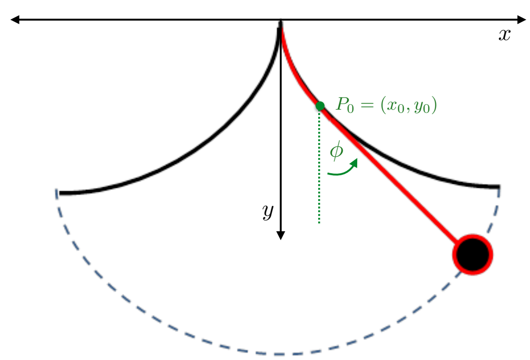
Übungsblatt 9

Sommersemester 2022

Abgabe: 24.06.2022
Besprechung: 28.06.2022

Aufgabe 17: Zykloidenpendel (10 Punkte)
Ein normales Pendel hat eine Schwingungsfrequenz, die nur für kleine Auslenkungen unabhängig von der Auslenkung ist (und dann gegeben ist durch $\omega = \sqrt{g/l}$ mit Fadenlänge l). Für große Auslenkungen verringert sich die Frequenz. Wenn man ein Pendel bauen will, dessen Schwingungsfrequenz exakt (unabhängig ist von der Auslenkung) durch $\sqrt{g/l}$ gegeben ist, muss man es in eine Zykloide mit geeigneten Maßen hängen, siehe Skizze. Für große Auslenkungen bleibt dann der Faden an dem Zykloidenrahmen hängen, was dazu führt, dass die effektive Fadenlänge verkleinert wird und die Frequenz gerade konstant bleibt. Wenn der Zykloidenrahmen beschrieben wird durch $(x, y) = R(\theta - \sin\theta, 1 - \cos\theta)$, muss der Faden die Länge $4R$ haben. Wir bezeichnen dann mit (x_0, y_0) den Punkt P_0, an dem der Faden am Rahmen hängen bleibt, und mit ϕ die Auslenkung des Pendels von der Vertikalen. Die Masse am Ende des Fadens sei m.





a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass folgender Zusammenhang zwischen dem Winkel $\phi(t)$ und dem Wälzwinkel $\theta_0(t)$ am Punkt P_0 besteht: $\phi = \theta_0/2$. *Hinweis*: Wie hängt ϕ mit der Ableitung der Kurve $x(y)$ in (x_0, y_0) zusammen?

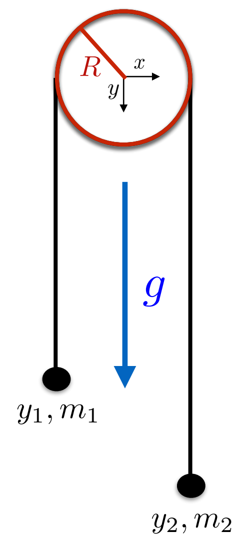
b) (3 Punkte) Drücken Sie die Länge des Fadens vom Aufhängepunkt bis zum Punkt P_0 durch ϕ aus. *Hinweis*: Berechnen Sie zuerst die Kurvenlänge von $y(x)$ als Integral über die Variable θ, dann substituieren Sie $\tilde{\phi} = \theta/2$ um das Integral zu lösen.

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion des Systems mit der generalisierten Koordinate ϕ.

d) (2 Punkte) Schreiben Sie die Lagrangefunktion des Systems um als Funktion der Koordinate $z = \sin\phi$ und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für z eine harmonische Schwingung mit Frequenz $\omega = \sqrt{g/(4R)}$ beschreibt.

Aufgabe 18: Atwoodsche Fallmaschine (10 Punkte)

Wir betrachten eine masselose Rolle mit Radius R, über die zwei Massen m_1, m_2 durch ein Seil mit Gesamtlänge l verbunden sind (siehe Skizze). Auf die beiden Massen wirkt die Gravitationskraft.



a) (2 Punkte) Lösen Sie das Problem mit den Lagrange-Gleichungen 1. Art. Dazu stellen Sie die Lagrangefunktion für die beiden generalisierten Koordinaten y_1, y_2 auf und formulieren die Zwangsbedingung in der Form $f(y_1, y_2) = 0$.

b) (3 Punkt) Lösen Sie das System aus den Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i}\,, \quad i = 1{,}2, \qquad f(y_1, y_2) = 0\,,$$

für $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \lambda$ und bestimmen Sie die Zwangskräfte $Q_i = \lambda \frac{\partial f(y_i)}{\partial y_i}$. Welche Kraft wirkt auf die Achse der Rolle?

c) (2 Punkte) Lösen Sie das Problem mit den Lagrange-Gleichungen 2. Art. Dazu stellen Sie die Lagrangefunktion für eine einzige geeignete generalisierte Koordinate auf.

d) (3 Punkte) Benutzen Sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art, um die Bewegungsgleichung für diese Koordinate zu finden. Bestimmen Sie nun die Zwangskräfte aus den Newton'schen Bewegungsgleichungen.