Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 0
Besprechung 25.04.2023

1. Partielle Ableitungen und Vektoranalysis

- a) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ für $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- b) Es sei nun $y = y(x)$. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{df}{dx}$ für $f(x, y(x)) = \sqrt{x^2 + y(x)^2}$.
- c) Betrachten Sie ein Fadenpendel mit einer Punktasse m , einer zeitlich variablen Fadenlänge $l(t)$ und einer Auslenkung um den Winkel $\varphi(t)$ aus der Vertikalen. Geben Sie einen Ausdruck für die potentielle Energie $U(\varphi(t), l(t))$ des Systems an und berechnen Sie $\frac{\partial U}{\partial t}$ sowie $\frac{dU}{dt}$.
- d) Es sei $\mathbf{a}$ ein konstanter Vektor, $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ und $r = |\mathbf{r}|$. Berechnen Sie $\nabla \frac{1}{r}$, $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ sowie $\nabla \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r}$.

Lösungsvorschlag

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1)$$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ liefern das gleiche Ergebnis wie in der a).

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x + y(x)y'(x)}{\sqrt{x^2 + y(x)^2}} \quad (2)$$

c) Die potentielle Energie kann ausgedrückt werden über $U(\varphi(t), l(t)) = -mgl(t) \cos \varphi(t)$ mit der Gravitationsbeschleunigung g . Da die Energie nicht explizit von der Zeit abhängt, ist $\partial U / \partial t = 0$, während

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t} = mg[l(t) \sin(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) - \cos(\varphi(t))\dot{l}(t)]. \quad (3)$$

d)

$$\nabla \frac{1}{r} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (4)$$

$$[\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})]_i = \underbrace{\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}}_{=\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}} a_l \underbrace{\partial_j r_m}_{=\delta_{jm}} = 3a_i - a_i = 2a_i \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{r} = \epsilon_{ijk} \partial_i \frac{a_j r_k}{\sqrt{r_m r_m}} = \underbrace{\epsilon_{ijk} \frac{a_j \delta_{ik}}{\sqrt{r_m r_m}}}_{=0} - \epsilon_{ijk} \frac{a_j r_k r_i}{(r_m r_m)^{3/2}} = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r})}{r^3} = 0 \quad (6)$$

2. Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) ergeben sich aus kartesischen Koordinaten (x, y, z) über die Zusammenhänge $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ mit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right|$, $\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right|$ und zeigen Sie, dass $\{\hat{\mathbf{e}}_\rho, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_z\}$ ein Orthonormalsystem bilden.
- Nun beschreibe $\mathbf{r}(t)$ die Bahn eines punktförmigen Teilchens als Funktion der Zeit t . Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens in Zylinderkoordinaten. Drücken Sie das Ergebnis mithilfe der Vektoren $\hat{\mathbf{e}}_\rho$, $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ und $\hat{\mathbf{e}}_z$ aus.

Lösungsvorschlag

- Es ist $\mathbf{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)^T$, also

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Damit $\{\hat{\mathbf{e}}_j \mid j = \rho, \varphi, z\}$ ein ONS bildet, muss $\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_{j'} = \delta_{j,j'}$ gelten, was sich durch einfaches Skalarmultiplizieren überprüfen lässt.

- Es ist $\mathbf{r}(t) = \rho(t)\hat{\mathbf{e}}_\rho(\varphi(t)) + z(t)\hat{\mathbf{e}}_z$. Damit folgt

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z}\hat{\mathbf{e}}_z \quad (8)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{\mathbf{e}}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z}\hat{\mathbf{e}}_z \quad (9)$$

3. Matrizen

- Berechnen Sie die Determinanten und die Spuren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -2i & 1 \\ 1+i & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1-i \end{pmatrix}. \quad (10)$$

- Berechnen Sie die transponierten, komplex konjugierten, hermitesch transponierten und inversen Matrizen von A , B , C , D und E .
- Berechnen Sie $A \cdot B$.
- Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix B .

Lösungsvorschlag

-

$$\det A = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 2, \quad \text{Tr } A = 3 + 2 = 5;$$

$$\det B = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4, \quad \text{Tr } B = 2 + 1 = 3;$$

$$\det C = 7 \cdot 3 - i \cdot (-i) = 20, \quad \text{Tr } C = 7 + 3 = 10; \quad (11)$$

$$\det D = 1 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot (-2) = -10, \quad \text{Tr } D = 1 + 1 + 2 = 4;$$

$$\det E = 1 \cdot (-1) \cdot (-2i) - 1 \cdot 2 \cdot 1 - (1-i) \cdot (1+i) \cdot (-2i) = -2 + 6i, \quad \text{Tr } E = 0 + 2 + (1-i) = 3 - i.$$

b)

$$\begin{aligned}
 A^T &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = A, \quad A^\dagger = A^T, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}; \\
 B^T &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^* = B, \quad B^\dagger = B^T, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \\
 C^T &= \begin{pmatrix} 7 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}, \quad C^* = C^T, \quad C^\dagger = C, \quad C^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 7 \end{pmatrix}; \\
 D^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad D^* = D, \quad D^\dagger = D^T, \quad D^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -13 & 11 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix};
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 E^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 1 \\ -2i & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix}, \quad E^* = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 1 \\ 1-i & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1+i \end{pmatrix}, \quad E^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1 \\ 2i & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1+i \end{pmatrix}, \\
 E^{-1} &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -8-4i & 4-8i & 8+4i \\ 3+9i & 1+3i & 2-4i \\ 2+6i & -6+2i & 8+4i \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 14 & 10 \end{pmatrix} \tag{13}$$

d) Es gilt, die Lösungen zur Eigenwertgleichung

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{14}$$

zu finden. Die Eigenwerte λ ergeben sich aus

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \tag{15}$$

zu $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$. Die jeweils zugehörigen Eigenvektoren finden wir durch Einsetzen von $\lambda_{1,2}$ in Gl. (14). Es folgt (wobei wir die normierten Eigenvektoren angeben)

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 2 \\ 3 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = 0, \tag{16}$$

$$\Rightarrow \quad v_{1,1} - v_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

und entsprechend

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. Integrale

Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + x - 6}, \quad \int_0^\infty x e^{-x} dx, \quad \int_0^\infty \sin(x) e^{-x} dx, \quad \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx.$$

Lösungsvorschlag

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{5} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{5} (\ln(x-2) - \ln(x+3)) \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{5} \ln(6).$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = - \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \right) \Big|_{\alpha=1} = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{\alpha} \Big|_{\alpha=1} = 1.$$

(Alternativ - Partielle Integration)

$$I = \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-x} dx = - \cos(x) e^{-x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \cos(x) e^{-x} dx = 1 - \sin(x) e^{-x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-x} dx = 1 - I,$$

$$\Rightarrow 2I = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-x} dx = \frac{1}{2}.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right) dx = \pi.$$

(Alternativ - Benutzen Sie die Identität $\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$)