Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 1
Besprechung 02.05.2023

---

1. Pendel mit bewegter Aufhängung (8 Punkte)

Wir betrachten ein Pendel mit einer bewegten Aufhängung (Abb. 1), dessen Bewegung auf zwei Dimensionen beschränkt ist. Die zeitabhängige Position der Aufhängung ist durch die Funktion $x_s(t)$ gegeben (gezwungen).

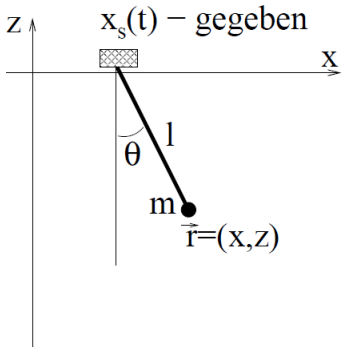

Abbildung 1: Das Pendel.

a) Bestimmen Sie die Zwangsbedingung für die Koordinaten des Pendels x und z. Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art erst in kartesischen und dann in Zylinderkoordinaten (in der x-z-Ebene). (2 Punkte)

b) Eliminieren Sie die Zwangskraft und leiten Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel θ her. Sie dürfen dabei $\theta \ll 1$ annehmen. Finden Sie dann die Bahnkurve für den Fall, dass $x_s(t) = x_0 \sin(\omega t)$. (3 Punkte)

c) Finden Sie jetzt für $x_s(t) = x_0 \sin(\omega t)$ die Zwangskraft, die auf das Pendel wirkt. (3 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Die Zwangsbedingung lautet

$$F(\boldsymbol{r}, t) = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_s)^2 - l^2 = (x - x_s(t))^2 + z^2 - l^2 = 0, \tag{1}$$

mit $\boldsymbol{r}_s = (x_s, 0)^T$, woraus die Zwangskraft

$$\boldsymbol{Z} = \lambda \boldsymbol{\nabla} F = \lambda \left[2(x - x_s)\hat{\boldsymbol{e}}_x + 2z\hat{\boldsymbol{e}}_z\right]. \tag{2}$$

folgt. Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -mg\hat{\boldsymbol{e}}_z + \boldsymbol{Z}. \tag{3}$$

In kartesischen Koordinaten ausgeschrieben also

$$m\ddot{x} = 2\lambda(x - x_s(t)), \quad m\ddot{z} = -mg + 2\lambda z. \tag{4}$$

In Zylinderkoordinaten gilt $x - x_s(t) = l\sin\theta$ und $z = -l\cos\theta$. Die zweiten Ableitungen sind jeweils gegeben durch

$$\ddot{x} = \ddot{x}_s(t) + l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta), \quad \ddot{z} = l(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta), \tag{5}$$

womit für die Lagrange-Gleichungen 1. Art folgt

$$m\ddot{x} = m\ddot{x}_s(t) + ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = 2\lambda l\sin\theta, \tag{6}$$

$$m\ddot{z} = ml(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = -mg - 2\lambda l\cos\theta. \tag{7}$$

b) Multiplizieren wir Gl. (6) mit $\cos\theta$, Gl. (7) mit $\sin\theta$ und addieren die beiden Gleichungen, eliminieren wir λ aus dem Problem und erhalten

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta - \cos\theta\ddot{x}_s(t). \tag{8}$$

Für kleine Auslenkungen $\theta \ll 1$ ist $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$. Dann gilt

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = -\frac{\ddot{x}_s(t)}{l}, \tag{9}$$

wobei $\omega_0^2 \equiv g/l$. Für das Beispiel $x_s(t) = x_0\sin\omega t$ gilt dann

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \frac{x_0}{l}\omega^2\sin\omega t. \tag{10}$$

Wir machen einen Ansatz $\theta(t) = a\sin\omega t$. Das ergibt

$$a = \frac{x_0}{l}\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{11}$$

und somit

$$\theta(t) = \frac{x_0}{l}\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t. \tag{12}$$

c) Aus Gl. (2) wissen wir $\boldsymbol{Z} = 2\lambda(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_s)$. Um einen Ausdruck für $\boldsymbol{Z}$ zu finden, müssen wir also nur λ bestimmen. Aus Gl. (7) folgt

$$\lambda = -\frac{m}{2l\cos\theta}\left[l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta + g\right]. \tag{13}$$

Für kleine Auslenkungen gilt also

$$\lambda \simeq -\frac{m}{2l}\frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots}\left[g + l\ddot{\theta}\theta + l\dot{\theta}^2\right] \simeq -\frac{m}{2l}\left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right)\left[g + l\ddot{\theta}\theta + l\dot{\theta}^2\right] \tag{14}$$

$$\simeq -\frac{m}{2l}\left(g + g\frac{\theta^2}{2} + l\ddot{\theta}\theta + l\dot{\theta}^2\right), \tag{15}$$

wobei wir Potenzen höher als 2 in θ vernachlässigen. Mit dem Ergebnis, das wir für $\theta(t)$ gefunden hatten, ist dann

$$\lambda = -\frac{mg}{2l}\left[1 + \left(\frac{x_0^2}{l^2}\right)\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\sin^2\omega t + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos 2\omega t\right)\right]. \tag{16}$$

2. Hängendes Seil (8 Punkte)

Finden Sie die Form $z(x)$ eines hängenden Seils (Abb. 2). Zwischen den Punkten A und B wirkt auf das Seil nur die Schwerkraft. Die Dichte des Seils ist homogen. Der Abstand zwischen A und B ist l und die Länge des Seiles ist $L > l$.

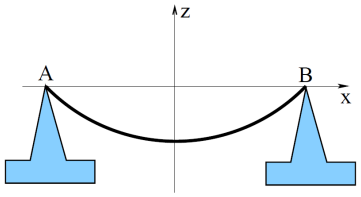

Abbildung 2: Das hängende Seil.

a) Betrachten Sie die Kräfte, die auf einen kleinen Teil des Seils wirken. Leiten Sie daraus die Differentialgleichung für $g(x) = \frac{dz}{\mathrm{d}x}$ her. Lösen Sie schließlich diese Differentialgleichung, um die allgemeine Form von $z(x)$ zu erhalten. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die freien Parameter, die in der allgemeinen Form von $z(x)$ verblieben sind, durch die Längen l und L. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Wir betrachten einen kleinen Teil des Seils (Abb. 3). Da das Teil sich nicht bewegt, ist die Summe aller Kräfte null. $\boldsymbol{T}(x)$ ist die Spannungskraft, die entlang des Seils gerichtet ist, $\theta(x)$ ist der Winkel zwischen Seil und der Horizontalen an der Koordinate x. Die Projektionen auf $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ und auf $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ ergeben

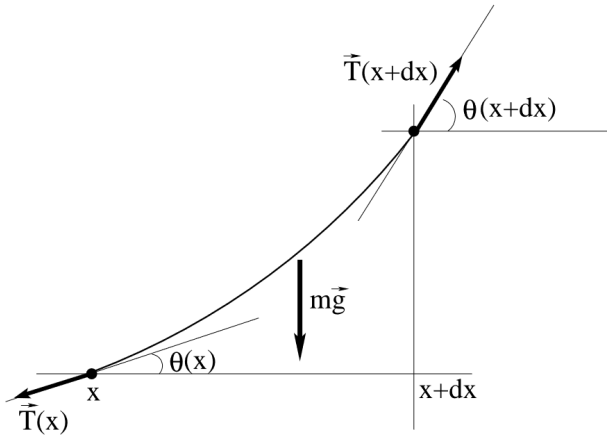

Abbildung 3: Ein kleiner Teil des Seils.

$$T(x)\cos\theta(x) = T(x+\mathrm{d}x)\cos\theta(x+\mathrm{d}x), \tag{17}$$

$$T(x+\mathrm{d}x)\sin\theta(x+\mathrm{d}x) - T(x)\sin\theta(x) = \rho g\,\mathrm{d}l = \rho g\frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta(x)}, \tag{18}$$

wobei $\mathrm{d}l$ die Länge des Abschnittes und ρ die Dichte des Seiles (pro Längeneinheit) sind.
Aus der ersten Gleichung folgt $T(x)\cos\theta(x) = C$ mit einer Konstanten C. Setzen wir $T(x) = \frac{C}{\cos\theta(x)}$ in die zweite Gleichung ein, erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\theta(x) = \frac{D}{\cos\theta(x)}, \tag{19}$$

mit $D = \frac{\rho g}{C}$. Außerdem folgt aus $\cos\theta = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}$, $\sin\theta = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}$, dass $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \equiv g(x) = \tan\theta$. Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) = D\sqrt{1+g^2(x)}. \tag{20}$$

Diese DGL ist beispielsweise durch Separation der Variablen lösbar und es folgt

$$g(x) = \sinh(Dx + c) \tag{21}$$

mit einer Konstanten c. Integrieren liefert uns schließlich die gesuchte Kurve

$$z(x) = \frac{\cosh(Dx + c)}{D} + h, \tag{22}$$

mit einer zweiten Konstanten h.

b) Die Konstante D kann durch die Länge des Seils und den Abstand zwischen A und B bestimmt werden. Wir können den Ursprung der Koordinaten immer so wählen, dass $c = 0$. Die Länge des Seils lässt sich berechnen durch

$$\frac{L}{2} = \int_0^{l/2} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\theta(x)}. \tag{23}$$

Wir haben

$$\frac{1}{\cos\theta(x)} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sqrt{1 + g^2} = \cosh(Dx)\,. \tag{24}$$

Es folgt

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{D}\sinh\left(\frac{Dl}{2}\right). \tag{25}$$

Diese Gleichung gibt den Parameter D als Funktion von l und L.
Die Konstante h bestimmt die Höhe des Seils. Wir wählen den Ursprung der Koordinaten so, dass $z(\frac{l}{2}) = 0$. Dann gilt

$$h = -\frac{\cosh(Dl/2)}{D}. \tag{26}$$

3. Stange gleitet Wand hinab **(4 Punkte)**

Eine Masse m ist genau in der Mitte einer masselosen Stange der Länge $2a$ fest angebracht. Dieses Gebilde lehnt reibungsfrei an einer Wand und gleitet wegen der Gravitationskraft, die auf m wirkt, an ihr herab. Die Stange berührt zu jeder Zeit die Wand (Abb. 4).

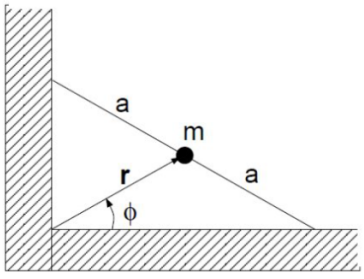

Abbildung 4: Die Stange.

a) Formulieren Sie die Zwangsbedingungen. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie die auftretende Zwangskraft. (3 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Die Zwangsbedingung lautet

$$F(r,\phi) = r - a = 0, \tag{27}$$

was z.B. mit dem Satz von Thales ersichtlich ist. Hieraus folgt als Ansatz für die Zwangskraft

$$\boldsymbol{Z} = \lambda \boldsymbol{\nabla} F(r,\phi) = \lambda \hat{\boldsymbol{e}}_r. \tag{28}$$

b) Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in Polarkoordinaten sind

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = \dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi, \tag{29}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{e}}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{e}}_\phi. \tag{30}$$

Hiermit erhalten wir folgende Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -mg\sin\phi + \lambda, \tag{31}$$

$$2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = -g\cos\phi. \tag{32}$$

Durch Ableiten der Zwangsbedingung erhalten wir

$$r(t) = a, \;\; \dot{r} = 0. \tag{33}$$

Somit vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$-ma\dot{\phi}^2 = -mg\sin\phi + \lambda, \tag{34}$$

$$a\ddot{\phi} = -g\cos\phi. \tag{35}$$

Hier kann nun direkt nach λ aufgelöst werden und wir erhalten die Zwangskraft

$$\boldsymbol{Z} = (mg\sin\phi - ma\dot{\phi}^2)\hat{\boldsymbol{e}}_r. \tag{36}$$