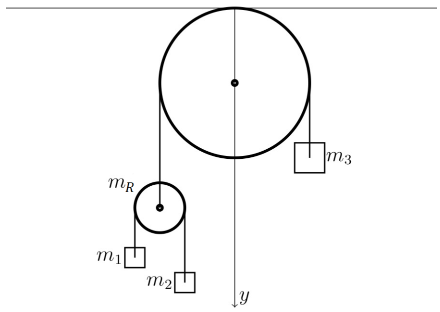
Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 2
Besprechung 09.05.2023

1. Doppelte Atwoodsche Fallmaschine (6 Punkte)

Wir betrachten eine Atwoodsche Fallmaschine, bei der die zweite Masse durch eine weitere solche Fallmaschine ersetzt sei. Die an den Enden der Seile hängenden Massen seien m_1, m_2 und m_3. Die am Seil hängende Rolle habe eine Masse m_R. Die Seile gleiten reibungsfrei über die Rollen und die Schwerkraft wirke in positive y-Richtung (siehe nebenstehende Abbildung).



a) Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie mithilfe der Zwangsbedingungen und Bewegungsgleichungen alle wirkenden Zwangskräfte in Abhängigkeit der Massen m_1, m_2, m_3 und m_R. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Wir bezeichnen die y-Koordinate der Masse m_i jeweils mit y_i. Die Zwangsbedingungen, bedingt durch die festen Längen der Seile, lauten dann

$$F_1 = y_1 + y_2 - 2y_\mathrm{R} - C_1 = 0 \tag{1}$$
$$F_2 = y_3 + y_\mathrm{R} - C_2 = 0, \tag{2}$$

wobei die Konstanten C_1 und C_2 durch die Längen der Seile und die Radien der Rollen gegeben, hier aber nicht weiter von Bedeutung sind.

b) Die an der Masse m_i auftretende Zwangskraft ist gegeben durch

$$Z_i = \sum_j \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial y_i} \tag{3}$$

mit $i, j \in \{1, 2, 3, \mathrm{R}\}$. Die Bewegungsgleichungen lauten entsprechend

$$m_1\ddot{y}_1 = m_1 g + \lambda_1, \tag{4}$$
$$m_2\ddot{y}_2 = m_2 g + \lambda_1, \tag{5}$$
$$m_3\ddot{y}_3 = m_3 g + \lambda_2, \tag{6}$$
$$m_\mathrm{R}\ddot{y}_\mathrm{R} = m_\mathrm{R} g - 2\lambda_1 + \lambda_2. \tag{7}$$

Zusätzlich erhalten wir durch zweifaches Ableiten der Zwangsbedingungen

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 2\ddot{y}_\mathrm{R}, \tag{8}$$
$$\ddot{y}_3 + \ddot{y}_\mathrm{R} = 0. \tag{9}$$

Aus den Gleichungen (6), (7) und (9) folgt

$$m_3 g + \lambda_2 = -m_3 g + \frac{2m_3\lambda_1}{m_\mathrm{R}} - \frac{m_3\lambda_2}{m_\mathrm{R}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = m_\mathrm{R} g + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_\mathrm{R}}{m_3}\right)\lambda_2 \tag{10}$$

Weiterhin erhalten wir mithilfe von (4), (5) und (7)

$$m_\mathrm{R} g - 2\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{m_\mathrm{R}}{2}\left[2g + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\lambda_1\right]. \tag{11}$$

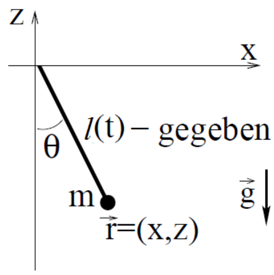
Wir definieren die reduzierte Masse $1/\mu \equiv 1/m_1 + 1/m_2$ und mit (10) folgt

$$\lambda_2 = -\frac{2m_\mathrm{R} g}{1 + \frac{m_\mathrm{R}}{m_3} - \frac{4\mu}{m_\mathrm{R}+4\mu}}. \tag{12}$$

Eingesetzt in (10) erhalten wir auch λ_1 und mit (3) folgen die gesuchten Zwangskräfte.

2. Pendel mit veränderlicher Fadenlänge (8 Punkte)

Die Fadenlänge eines mathematischen Pendels (in 2D) der Masse m sei durch die von der Zeit abhängige Funktion $l(t)$ gegeben.



a) Finden Sie eine geeignete generalisierte Koordinate q, um die Position des Pendels zu beschreiben. Bestimmen Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U sowie die Lagrangefunktion $L = T - U$ in Abhängigkeit von q und $\dot{q}$. (3 Punkte)

b) Leiten Sie mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

die Bewegungsgleichung für kleine Winkel $\theta \ll 1$ her. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie: $l(t) = l =$ konst. ist die einzige (physikalische) Möglichkeit, die harmonische, periodische Schwingungen von $\theta(t)$ erlaubt. (3 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Die Position des Pendels lässt sich durch die generalisierte Koordinate θ beschreiben. Es ist $\boldsymbol{r}(t) = l(t)(\sin\theta(t), -\cos\theta(t))^T$. Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) \tag{13}$$

und die potentielle Energie ist

$$U = mgz = -mgl\cos\theta. \tag{14}$$

Somit lautet die Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta. \tag{15}$$

b) Der zweite Term der Euler-Lagrange-Gleichung liefert

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin\theta. \tag{16}$$

Der Beitrag vom ersten Term lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ml^2\dot{\theta}\right) = ml^2\ddot{\theta} + 2ml\dot{l}\dot{\theta}. \tag{17}$$

Insgesamt kann die Bewegungsgleichung also geschrieben werden als

$$l^2(t)\ddot{\theta}(t) + 2l(t)\dot{l}(t)\dot{\theta}(t) + gl(t)\sin\theta(t) = 0, \tag{18}$$

was sich für kleine Winkel zu

$$l^2(t)\ddot{\theta}(t) + 2l(t)\dot{l}(t)\dot{\theta}(t) + gl(t)\theta(t) = 0 \tag{19}$$

vereinfacht.

c) Wenn eine gegebene Funktion $l(t)$ harmonische Schwingungen von $\theta(t)$ erlaubt, so muss die Lösung zur Differentialgleichung (18) geschrieben werden können in der Form $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \delta)$. Nehmen wir nun an, diese Form von $\theta(t)$ sei eine Lösung, setzen sie in (18) ein und erhalten so eine Differentialgleichung für die in diesem Fall zulässigen $l(t)$

$$-\omega^2 l^2(t)\cos(\omega t + \delta) - 2\omega l(t)\dot{l(t)}\sin(\omega t + \delta) + gl(t)\cos(\omega t + \delta) = 0 \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\tan(\omega t + \delta)\dot{l}(t) + \omega l(t) = \frac{g}{\omega}. \tag{21}$$

Dies ist eine inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Die allgemeine Lösung erhalten wir, indem wir eine partikuläre Lösung zum inhomogenen Fall finden und diese zur allgemeinen Lösung des homogenen Falls addieren. Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch $l_p(t) = g/\omega^2$. Die zugehörige homogene Gleichung lautet

$$2\tan(\omega t + \delta)\dot{l}_h(t) + \omega l_h(t) = 0. \tag{22}$$

Sie lässt sich durch Separation der Variablen lösen

$$\int \frac{\mathrm{d}l_h}{l_h} = \frac{\omega}{2}\int \mathrm{d}t\ \cot(\omega t + \delta) \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(l_h) + c = \frac{1}{2}\ln(\sin(\omega t + \delta)) \tag{24}$$

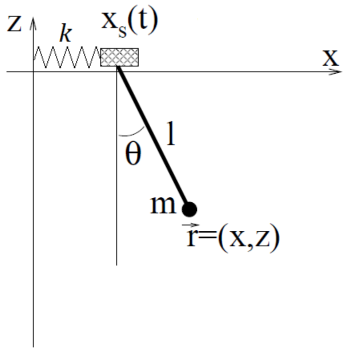
$$\Leftrightarrow \quad l_h(t) = \frac{C}{\sqrt{\sin(\omega t + \delta)}}. \tag{25}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$l(t) = \frac{C}{\sqrt{\sin(\omega t + \delta)}} + \frac{g}{\omega^2}. \tag{26}$$

Immer, wenn $\omega t + \delta = n\pi$, liefert der erste Term eine unendliche Fadenlänge, was offensichtlich unphysikalisch ist. Die einzige Möglichkeit, diese Unendlichkeiten loszuwerden, ist die Konstante $C = 0$ zu setzen, was uns nur die uns bereits bekannte Lösung $l = g/\omega^2 =$ konst. übrig lässt. Folglich ist eine periodische, harmonische Schwingung nur mit konstanter Fadenlänge möglich.

3. Pendel mit beweglicher Aufhängung an einer Feder (7 Punkte)



Wir betrachten eine ähnliche Situation wie in Blatt 1, Aufgabe 1 – mit dem Unterschied, dass die Koordinate $x_s(t)$ der Aufhängung hier nicht vorgegeben sein soll. Stattdessen sei die (masselose) Aufhängung über eine Feder mit Federkonstante k an einer Wand befestigt und könne frei in x-Richtung schwingen.

a) Finden Sie geeignete generalisierte Koordinaten, bestimmen Sie die Lagrangefunktion und stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. (4 Punkte)

b) Wir beschränken uns nun auf den Fall kleiner Schwingungen $\theta \ll 1$. Vernachlässigen Sie Terme von zweiter oder höherer Ordnung in θ und $\dot{\theta}$ und setzen Sie anschließend sowohl für $\theta(t)$ als auch für $x_s(t)/l$ eine harmonische Schwingung mit Frequenz ω an. Bestimmen Sie das Verhältnis der Amplituden dieser Schwingungen. (3 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Die Position der Masse m lässt sich mit den generalisierten Koordinaten $x_s(t)$ und $\theta(t)$ beschreiben mittels $\boldsymbol{r} = (x_s + l\sin\theta, -l\cos\theta)$. Die kinetische Energie des Systems ist gegeben durch

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}m\left((\dot{x}_s + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2\right) \tag{27}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_s^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}_s\dot{\theta}\cos\theta\right). \tag{28}$$

Die potentielle Energie kann geschrieben werden als

$$U = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}kx_s^2 \tag{29}$$

und die Lagrangefunktion lautet $L = T - U$. Die erste Bewegungsgleichung erhalten wir mittels

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} = \quad m\ddot{x}_s + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = -kx_s \quad = \frac{\partial L}{\partial x_s}. \tag{30}$$

Die zweite lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \quad ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}_s\cos\theta = -mgl\sin\theta \quad = \frac{\partial L}{\partial \theta}. \tag{31}$$

b) Wir vernachlässigen nun Terme höherer als erster Ordnung in θ und $\dot{\theta}$ und erhalten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}_s + \frac{k}{m}x_s = -l\ddot{\theta} \tag{32}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = -\frac{\ddot{x}_s}{l}. \tag{33}$$

Ein Ansatz harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz $x_s(t) = x_0 \sin(\omega t + \delta_1)$ und $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \delta_2)$ ergibt eingesetzt in die Bewegungsgleichungen

$$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) x_0 \sin(\omega t + \delta_1) = \omega^2 l \theta_0 \sin(\omega t + \delta_2) \tag{34}$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{l}\right) \theta_0 \sin(\omega t + \delta_2) = \omega^2 x_0 \sin(\omega t + \delta_1)/l \tag{35}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_0}{l\theta_0} = \frac{\omega^2}{k/m - \omega^2} \frac{\sin(\omega t + \delta_2)}{\sin(\omega t + \delta_1)} = \frac{g/l - \omega^2}{\omega^2} \frac{\sin(\omega t + \delta_1)}{\sin(\omega t + \delta_2)} \tag{36}$$

Damit dieses Verhältnis zeitunabhängig ist muss $\delta_1 = \delta_2$ gelten oder $\delta_1 = \delta_2 + \pi$. Dann folgt

$$\frac{\omega^2}{k/m - \omega^2} = \frac{g/l - \omega^2}{\omega^2} \tag{37}$$

und damit

$$\omega^2 = \frac{kg}{kl + mg}. \tag{38}$$

Das Amplitudenverhältnis lautet entsprechend

$$\frac{x_0}{l\theta_0} = \frac{g/l}{k/m}. \tag{39}$$