

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich**Blatt 3**
Abgabe 12.05.2023, Besprechung 16.05.2023**1. Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens (6 Punkte)**

Die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens (Ladung q) im elektrischen ($\mathbf{E}$) und magnetischen ($\mathbf{B}$) Feld ist

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi(\mathbf{r}, t) + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Dabei ist ϕ das elektrische Potential und $\mathbf{A}$ das sogenannte Vektorpotential. Diese hängen, wie Sie in der Elektrodynamik noch lernen werden, mit $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ über folgende Relationen zusammen

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A},$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

c ist die Lichtgeschwindigkeit.

Zeigen Sie, dass die zugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}] \right),$$

wobei der zweite Term auf der rechten Seite die Lorentzkraft ist.

2. Ebenes Doppelpendel (4 Punkte)

Betrachten Sie ein ebenes Doppelpendel das aus zwei unterschiedlichen Massen m_1 , m_2 besteht. Die Massen sind miteinander und mit einem Aufhängepunkt durch zwei massenlose Stäbe der Länge l verbunden (siehe Abb. 1). Die Massen können sich nur in der $x - z$ Ebene bewegen. Als unabhängige Koordinaten wählen wir die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 (siehe Abb. 1).

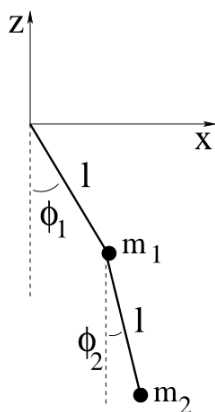


Abbildung 1: Das ebene Doppelpendel.

Drücken Sie die kinetische und potentielle Energie durch ϕ_1, ϕ_2 und deren Ableitungen aus. Geben Sie die Lagrangefunktion $L(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2)$ an und bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.

3. Rotierender Massepunkt

(6 Punkte)

Betrachten Sie einen masselosen Ring, der im Schwerfeld der Erde mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und auf dem eine Masse m reibungsfrei gleiten kann (Abb.2).

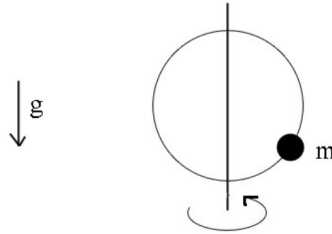


Abbildung 2: Der rotierende Massepunkt.

- Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. (4 Punkte)
- Bestimmen Sie die möglichen Gleichgewichtslagen (also die Positionen der Masse auf dem Ring, an denen sie relativ zum Ring in Ruhe sein kann). (2 Punkte)

4. Spiralförmige Symmetrie

(4 Punkte)

Es befinde sich ein Massepunkt m in einem Potential der Form

$$U(\rho, \varphi, z) = U(\rho, c\varphi + z)$$

mit Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) und einer Konstanten c . Benutzen Sie das Noether-Theorem um einen Ausdruck für eine Erhaltungsgröße zu bestimmen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Lagrangefunktion invariant ist unter der Transformation $\rho \rightarrow \rho, \varphi \rightarrow \varphi + \alpha, z \rightarrow z - c\alpha$.