Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

**Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023**

**Prof. Dr. A. Shnirman**
**Dr. A. Pavlov, A. Reich**

**Musterlösung zu Blatt 3**
**Besprechung 16.05.2023**

---

## 1. Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens (6 Punkte)

Die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens (Ladung $q$) im elektrischen ($\boldsymbol{E}$) und magnetischen ($\boldsymbol{B}$) Feld ist

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^{\,2} - q\phi(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t).$$

Dabei ist $\phi$ das elektrische Potential und $\boldsymbol{A}$ das sogenannte Vektorpotential. Diese hängen, wie Sie in der Elektrodynamik noch lernen werden, mit $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ über folgende Relationen zusammen

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}.$$

$c$ ist die Lichtgeschwindigkeit.

Zeigen Sie, dass die zugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}]\right),$$

wobei der zweite Term auf der rechten Seite die Lorentzkraft ist.

**Lösungsvorschlag**

Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{1}$$

Erst berechnen wir die linke Seite:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t). \tag{2}$$

Dann

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \frac{q}{c}(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t). \tag{3}$$

Jetzt berechnen wir die rechte Seite:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = -q\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q}{c}\dot{r}^i\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}A^i(\boldsymbol{r}, t) \equiv -q\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q}{c}\boldsymbol{\nabla}\left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right). \tag{4}$$

Das ergibt zusammen

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -q\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}, t) - \frac{q}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}\left(\boldsymbol{\nabla}(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}) - (\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}\right). \tag{5}$$

Wir benutzen jetzt $[\boldsymbol{A} \times [\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}]] = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$, wobei $\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}$. Schließlich folgt

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{E} + \frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{r}} \times [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}]] = q\boldsymbol{E} + \frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}]. \tag{6}$$

## 2. Ebenes Doppelpendel (4 Punkte)

Betrachten Sie ein ebenes Doppelpendel das aus zwei unterschiedlichen Massen $m_1$, $m_2$ besteht. Die Massen sind miteinander und mit einem Aufhängepunkt durch zwei massenlose Stäbe der Länge $l$ verbunden (siehe Abb. 1). Die Massen können sich nur in der $x-z$ Ebene bewegen. Als unabhängige Koordinaten wählen wir die Winkel $\phi_1$ und $\phi_2$ (siehe Abb. 1).

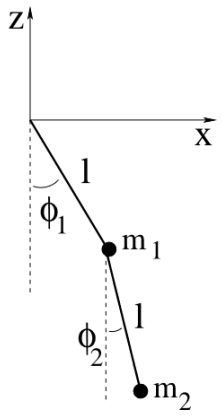


Abbildung 1: Das ebene Doppelpendel.

Drücken Sie die kinetische und potentielle Energie durch $\phi_1$, $\phi_2$ und deren Ableitungen aus. Geben Sie die Lagrangefunktion $L(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2)$ an und bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.

**Lösungsvorschlag**

Es ist $x_1 = l\sin\phi_1$, $z_1 = -l\cos\phi_1$, $x_2 = x_1 + l\sin\phi_2$, $z_2 = z_1 - l\cos\phi_2$. Dann gilt

$$\dot{x}_1 = l\dot{\phi}_1\cos\phi_1, \quad z_1 = l\dot{\phi}_1\sin\phi_1, \tag{7}$$

$$\dot{x}_2 = l\dot{\phi}_1\cos\phi_1 + l\dot{\phi}_2\cos\phi_2, \quad z_2 = l\dot{\phi}_1\sin\phi_1 + l\dot{\phi}_2\sin\phi_2. \tag{8}$$

Die kinetische Energie ist damit

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\left(\dot{\phi}_2^2 + 2\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\right), \tag{9}$$

wobei wir $\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 = \cos(\phi_1-\phi_2)$ benutzt haben.
Die potentielle Energie lautet

$$U = g(m_1z_1 + m_2z_2) = -(m_1+m_2)gl\cos\phi_1 - m_2gl\cos\phi_2. \tag{10}$$

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art lauten

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left[\dot{\phi}_2^2\sin(\phi_1-\phi_2) + \ddot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2)\right] + \frac{g}{l}\sin\phi_1 = 0, \tag{11}$$

$$\ddot{\phi}_2 + \left[-\dot{\phi}_1^2\sin(\phi_1-\phi_2) + \ddot{\phi}_1\cos(\phi_1-\phi_2)\right] + \frac{g}{l}\sin\phi_2 = 0. \tag{12}$$

## 3. Rotierender Massepunkt (6 Punkte)

Betrachten Sie einen masselosen Ring, der im Schwerefeld der Erde mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega$ rotiert und auf dem eine Masse $m$ reibungsfrei gleiten kann (Abb.2).

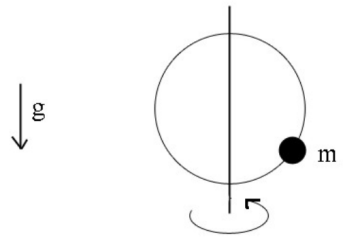


Abbildung 2: Der rotierende Massepunkt.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie die möglichen Gleichgewichtslagen (also die Positionen der Masse auf dem Ring, an denen sie relativ zum Ring in Ruhe sein kann). (2 Punkte)

**Lösungsvorschlag**

a) Die $z-$Achse zeige nach unten und der Ursprung liege im Mittelpunkt des Rings. Für die Lagrange-Funktion gilt allgemein

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz. \tag{13}$$

In Kugelkoordinaten:

$$L = \frac{m}{2}\left(a^2\dot{\theta}^2 + \omega^2 a^2 \sin^2\theta\right) + mga\cos\theta. \tag{14}$$

$r = a$ und $\dot{\phi} = \omega$ sind Konstanten.
Hier kann ein effektives Potential eingeführt werden

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^{\,2} - U_{\text{eff}}(\theta);\;\; U_{\text{eff}}(\theta) = -mga\cos\theta - \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta \tag{15}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung für den Winkel $\theta$ liefert

$$ma^2\ddot{\theta} = m\omega^2 a^2\sin\theta\cos\theta - mga\sin\theta = -\frac{\partial}{\partial\theta}U_{\text{eff}}. \tag{16}$$

b) In der Gleichgewichtslage gilt $\frac{\partial}{\partial\theta}U_{\text{eff}}(\theta) = 0$, d.h. der Winkel $\theta$ ändert sich zeitlich nicht. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial\theta}U_{\text{eff}}(\theta) = mga\sin\theta\left(1 - \frac{\omega^2 a}{g}\cos\theta\right) \tag{17}$$

Die einzigen Gleichgewichtslagen sind $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ falls $\omega^2 < \frac{g}{a}$. Falls $\omega^2 > \frac{g}{a}$, gibt es noch zwei weitere Gleichgewichtslagen: $\theta = \pm\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$.

## 4. Spiralförmige Symmetrie (4 Punkte)

Es befinde sich ein Massepunkt $m$ in einem Potential der Form

$$U(\rho, \varphi, z) = U(\rho, c\varphi + z)$$

mit Zylinderkoordinaten $(\rho, \varphi, z)$ und einer Konstanten $c$. Benutzen Sie das Noether-Theorem, um einen Ausdruck für eine Erhaltungsgröße zu bestimmen.

*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Lagrangefunktion invariant ist unter der Transformation $\rho \to \rho, \varphi \to \varphi + \alpha,\ z \to z - c\alpha$.*

**Lösungsvorschlag**

Die Lagrangefunktion ist invariant unter der Transformation $\rho \to \rho' = \rho$, $\varphi \to \varphi' = \varphi + \alpha$, $z \to z' = z - c\alpha$:

$$\dot{\rho}' = \dot{\rho},\ \dot{\varphi}' = \dot{\varphi},\ \dot{z}' = \dot{z} \Rightarrow \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}'^2 + \rho'^2\dot{\varphi}'^2 + \dot{z}'^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right), \tag{18}$$

$$U(\rho', c\varphi' + z') = U(\rho, c\varphi + z) \Rightarrow L(\rho', \varphi', z', \dot{\rho}', \dot{\varphi}', \dot{z}') = T - U = L(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) \tag{19}$$

Alternativ können wir dies ausdrücken über die Definition einer Schar von Bahnkurven $\rho(\alpha) = \rho, \varphi(\alpha) = \varphi + \alpha, z(\alpha) = z - c\alpha$ mit denen gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} L(\dot{\rho}(\alpha), \dot{\varphi}(\alpha), \dot{z}(\alpha), \rho(\alpha), \varphi(\alpha), z(\alpha)) = 0. \tag{20}$$

Aus der in der Vorlesung präsentierten Form des Noether-Theorems wissen wir dann, dass

$$Q \equiv \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\right] = m\rho^2\dot{\varphi} - cm\dot{z} \equiv L_z - cp_z \tag{21}$$

eine Erhaltungsgröße ist, also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q = 0$, wobei wir die $z$-Komponente des Drehimpulses $L_z$ und des Impulses $p_z$ identifiziert haben.