Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Blatt 4
Abgabe 19.05.2023, Besprechung 23.05.2023

---

1. Relativistische Lagrangefunktion (4 Punkte)

Die Lagrangefunktion eines freien relativistischen Teilchens mit Ruhemasse m ist gegeben durch

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{r}}^2/c^2} \equiv -mc^2/\gamma(\dot{\boldsymbol{r}}), \tag{1}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist und wir den Lorentzfaktor $\gamma(\boldsymbol{v}) = \left(1 - \boldsymbol{v}^2/c^2\right)^{-1/2}$ definiert haben.

a) Zeigen Sie ausgehend von der Invarianz der Lagrangefunktion bezüglich Translationen in der Zeit, dass die relativistische Energie-Impuls-Relation

$$E^2 = c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4, \tag{2}$$

mit der Energie E und dem Impuls $\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}$, erfüllt ist. (3 Punkte)

b) Überzeugen Sie sich davon, dass der nicht-relativistische Limes $\dot{\boldsymbol{r}}^2 \ll c^2$ dem klassischen Ergebnis $E = m\dot{\boldsymbol{r}}^2/2 + \text{konst.}$ entspricht. (1 Punkt)

2. Kreisbahnen (4 Punkte)

Wir betrachten einen Massepunkt m in zwei Dimensionen, dessen Lagrangefunktion gegeben sei durch

$$L = \frac{m\omega}{2}\left[\dot{x}y - x\dot{y} - \omega(x^2 + y^2)\right] \tag{3}$$

mit einer Konstanten $\omega \in \mathbb{R}$.

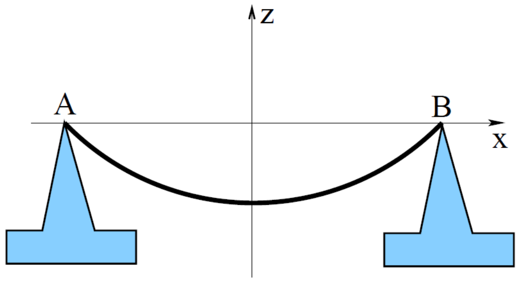
a) Bestimmen Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen. Zeigen Sie, dass die möglichen Bahnkurven Kreisbahnen sind. (2 Punkte)

b) Nutzen Sie, dass die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängig ist, um zu zeigen, dass die Energie des Systems durch den Radius der entsprechenden Kreisbahn eindeutig festgelegt ist. (2 Punkte)

3. Variationsrechnung - Hängendes Seil (12 Punkte)

Wie schon auf Übungsblatt 1, wollen wir auch hier einen Ausdruck für die Form eines zwischen zwei Punkten A und B aufgehängten Seils der Länge L und homogener Massendichte $\rho = m/L$ finden, auf das die Schwerkraft g wirkt. Allerdings wollen wir uns hier anstatt dem Betrachten von Kräften, der Variationsrechnung bedienen.

Das Ziel ist es, die potentielle Energie, die als Funktional $U = U[z(x)]$ aufgefasst werden kann, zu minimieren, um so die Form des Seils als Kurve $z(x)$ zu erhalten. Dabei muss als Nebenbedingung beachtet werden, dass die Länge dieser Kurve ebenfalls als ein Funktional $K = K[z(x)]$ geschrieben werden kann und gleich L sein muss.



a) Zeigen Sie zunächst, dass eine Kurve $z(x)$, die ein Funktional der Form

$$F[z(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(z(x), z'(x), x) \tag{4}$$

minimiert, die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{5}$$

erfüllt. Betrachten Sie hierzu analog zur Vorlesung eine Variation $z(x) \to z(x) + \delta z(x)$ (mit $\delta z(x_1) = \delta z(x_2) = 0$). (4 Punkte)

b) Überzeugen Sie sich davon, dass für die entsprechenden Funktionale im Problem des hängenden Seils gilt

$$U = \rho g \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, z(x)\sqrt{1 + (z'(x))^2}, \quad K = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, \sqrt{1 + (z'(x))^2} \overset{!}{=} L. \tag{6}$$

(4 Punkte)

Um ein Funktional

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(z(x), z'(x), x) \quad \text{mit Nebenbedingung} \quad \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, g(z(x), z'(x), x) = C$$

zu minimieren, kann ein sogenannter Lagrangemultiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ eingeführt und stattdessen das Funktional

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, h(z(x), z'(x), x) \quad \text{mit} \quad h(z(x), z'(x), x) = f(z(x), z'(x), x) - \lambda g(z(x), z'(x), x)$$

minimiert werden. λ lässt sich dabei im Anschluss aus der Nebenbedingung bestimmen.

c) Überzeugen Sie sich durch Einführen eines Lagrangemultiplikators λ und mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung, dass es sich bei der allgemeinen Lösung, die wir auf Blatt 1 gefunden hatten, tatsächlich um ein Minimum von $U[z(x)]$ unter der Nebenbedingung $K[z(x)] = L$ handelt. (4 Punkte)


</>
Keep Calm
Titel:
TKM: Wir verhandlen nicht mit der Natur! Warum es sich lohnt manche unlösbare Probleme zu lösen und andere nicht - Professor Schmalian
Wann?
Am 17.05.2023
um 17:30 Uhr
Wo?
Lehmann-Hörsaal
It's not
Rocket Science
Eine Veranstaltung eurer Mentoren