Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 4
Besprechung 16.05.2023

---

1. Relativistische Lagrangefunktion (4 Punkte)

Die Lagrangefunktion eines freien relativistischen Teilchens mit Ruhemasse m ist gegeben durch

$$L = -mc^2\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}^2/c^2} \equiv -mc^2/\gamma(\dot{\boldsymbol{r}}), \tag{1}$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist und wir den Lorentzfaktor $\gamma(\boldsymbol{v}) = \left(1-\boldsymbol{v}^2/c^2\right)^{-1/2}$ definiert haben.

a) Zeigen Sie ausgehend von der Invarianz der Lagrangefunktion bezüglich Translationen in der Zeit, dass die relativistische Energie-Impuls-Relation

$$E^2 = c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4, \tag{2}$$

mit der Energie E und dem Impuls $\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}$, erfüllt ist. (3 Punkte)

b) Überzeugen Sie sich davon, dass der nicht-relativistische Limes $\dot{\boldsymbol{r}}^2 \ll c^2$ dem klassischen Ergebnis $E = m\dot{\boldsymbol{r}}^2/2 + \text{konst.}$ entspricht. (1 Punkt)

Lösungsvorschlag

a) Laut Vorlesung ergibt sich die Energie eines Systems, dessen Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt, aus

$$E = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - L \tag{3}$$

wobei $\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \gamma m\dot{\boldsymbol{r}}$. Also

$$E = mc^2\left(1+\frac{\boldsymbol{p}^2}{m^2c^2}\right)/\gamma. \tag{4}$$

Die Definition von γ liefert $\gamma^2 = 1+\frac{\boldsymbol{p}^2}{m^2c^2}$ und damit folgt

$$E^2 = c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4. \tag{5}$$

Insbesondere sei bemerkt, dass, obwohl kein Potential vorhanden ist, $E \neq L$.

b) Es ist nach (4)

$$E = \gamma mc^2. \tag{6}$$

Wir entwickeln γ bis zur zweiten Ordnung in $\dot{\boldsymbol{r}}^2/c^2$

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^4}{c^4}\right) \tag{7}$$

und erhalten wie erwartet

$$E = mc^2 + \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2. \tag{8}$$

2. Kreisbahnen (4 Punkte)

Wir betrachten einen Massepunkt m in zwei Dimensionen, dessen Lagrangefunktion gegeben sei durch

$$L = \frac{m\omega}{2}\left[\dot{x}y - x\dot{y} - \omega(x^2+y^2)\right] \tag{9}$$

mit einer Konstanten $\omega \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen. Zeigen Sie, dass die möglichen Bahnkurven Kreisbahnen sind. (2 Punkte)

b) Nutzen Sie, dass die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängig ist, um zu zeigen, dass die Energie des Systems durch den Radius der entsprechenden Kreisbahn eindeutig festgelegt ist. (2 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = & \frac{m\omega}{2}\dot{y} = -\frac{m\omega}{2}\dot{y} - m\omega^2 x & = \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = & -\frac{m\omega}{2}\dot{x} = \frac{m\omega}{2}\dot{x} - m\omega^2 y & = \frac{\partial L}{\partial y} \end{cases} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \dot{y} = -\omega x, \qquad \dot{x} = \omega y. \tag{11}$$

Leitet man die erste Gleichung einmal ab und setzt die zweite darin ein, folgt $\ddot{y} = -\omega^2 y$, sodass die allgemeine Lösung $y(t) = R\cos(\omega t + \phi)$ folgt, mit zwei Konstanten R und ϕ. Aus (11) folgt dann außerdem $x(t) = R\sin(\omega t + \phi)$. Damit lassen sich die möglichen Bahnkurven also schreiben als

$$\boldsymbol{r} = R\begin{pmatrix}\sin(\omega t + \phi)\\ \cos(\omega t + \phi)\end{pmatrix}, \tag{12}$$

was Kreisbahnen mit Radius $|\boldsymbol{r}| = R$ und Winkelgeschwindigkeit ω entspricht.

b) Die Energie ergibt sich wieder aus

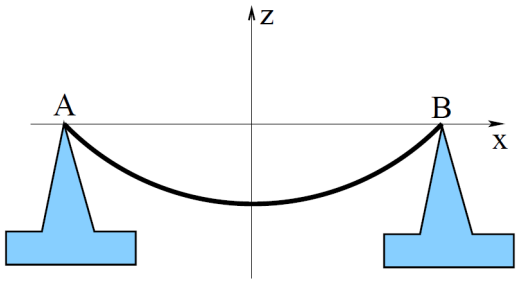
$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - L = \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) = \frac{m\omega^2}{2}R^2. \tag{13}$$

Sie hängt damit also lediglich vom Radius der Kreisbewegung ab.

3. Variationsrechnung - Hängendes Seil (12 Punkte)

Wie schon auf Übungsblatt 1, wollen wir auch hier einen Ausdruck für die Form eines zwischen zwei Punkten A und B aufgehängten Seils der Länge L und homogener Massendichte $\rho = m/L$ finden, auf das die Schwerkraft g wirkt. Allerdings wollen wir uns hier anstatt dem Betrachten von Kräften, der Variationsrechnung bedienen.

Das Ziel ist es, die potentielle Energie, die als Funktional $U = U[z(x)]$ aufgefasst werden kann, zu minimieren, um so die Form des Seils als Kurve $z(x)$ zu erhalten. Dabei muss als Nebenbedingung beachtet werden, dass die Länge dieser Kurve ebenfalls als ein Funktional $K = K[z(x)]$ geschrieben werden kann und gleich L sein muss.



a) Zeigen Sie zunächst, dass eine Kurve $z(x)$, die ein Funktional der Form

$$F[z(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(z(x), z'(x), x) \tag{14}$$

minimiert, die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial z} \tag{15}$$

erfüllt. Betrachten Sie hierzu analog zur Vorlesung eine Variation $z(x) \to z(x) + \delta z(x)$ (mit $\delta z(x_1) = \delta z(x_2) = 0$). (4 Punkte)

b) Überzeugen Sie sich davon, dass für die entsprechenden Funktionale im Problem des hängenden Seils gilt

$$U = \rho g \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, z(x)\sqrt{1 + (z'(x))^2}, \quad K = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, \sqrt{1 + (z'(x))^2} \stackrel{!}{=} L. \tag{16}$$

(4 Punkte)

Um ein Funktional

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(z(x), z'(x), x) \quad \text{mit Nebenbedingung} \quad \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, g(z(x), z'(x), x) = C$$

zu minimieren, kann ein sogenannter Lagrangemultiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ eingeführt und stattdessen das Funktional

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, h(z(x), z'(x), x) \quad \text{mit} \quad h(z(x), z'(x), x) = f(z(x), z'(x), x) - \lambda g(z(x), z'(x), x)$$

minimiert werden. λ lässt sich dabei im Anschluss aus der Nebenbedingung bestimmen.

c) Überzeugen Sie sich durch Einführen eines Lagrangemultiplikators λ und mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung, dass es sich bei der allgemeinen Lösung, die wir auf Blatt 1 gefunden hatten, tatsächlich um ein Minimum von $U[z(x)]$ unter der Nebenbedingung $K[z(x)] = L$ handelt. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Wir führen eine Variation des gegebenen Funktionals durch

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(z(x) + \delta z(x), z'(x) + \delta z'(x), x) - \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(z(x), z'(x), x) \tag{17}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, \left(\frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f}{\partial z'}\delta z'\right) \tag{18}$$

wobei $\delta z' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta z$. Partielles Integrieren liefert dann

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\delta z + \frac{\partial f}{\partial z'}\delta z\Big|_{x_1}^{x_2}. \tag{19}$$

Da $\delta z(x_1) = \delta z(x_2) = 0$, verschwinden die Randterme. Wenn $z(x)$ ein Minimum von F ist, muss die Variation verschwinden (vgl.: Ableitung verschwindet am Minimum einer Funktion), es gilt also

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\delta z = 0. \tag{20}$$

Da dies für beliebige Variationen δz gelten muss, erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{21}$$

b) Die Länge eines infinitesimal kleinen Stücks der Seilkurve ist gegeben durch

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \to \sqrt{1 + (z'(x))^2}\mathrm{d}x. \tag{22}$$

Die Gesamtlänge ist also

$$K = \int_A^B \mathrm{d}l = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, \sqrt{1 + (z'(x))^2} \stackrel{!}{=} L. \tag{23}$$

Entsprechend gehen wir vor, um die potentielle Energie zu erhalten. Die Masse eines infinitesimalen Seilstücks ist $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}l$. Die potentielle Energie lautet damit

$$U = g\int_A^B \mathrm{d}m\, z = \rho g \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, z(x)\sqrt{1 + (z'(x))^2}. \tag{24}$$

c) Wir führen einen Lagrangemultiplikator λ ein und suchen nach einem Minimum des Funktionals

$$U - \lambda K = \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, \sqrt{1 + (z'(x))^2}(\rho g z(x) - \lambda) \equiv \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x\, f(z, z', x). \tag{25}$$

Wie wir oben gesehen haben, muss so ein Minimum die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen. Es folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{z'(x)(\rho g z(x) - \lambda)}{\sqrt{1 + z'(x)^2}} = \rho g\sqrt{1 + z'(x)^2}. \tag{26}$$

Auf Übungsblatt 1 hatten wir die Lösung $z(x) = \cosh(Dx + c)/D + h$ gefunden mit frei wählbaren Parametern D, c und h. Wir bemerken zunächst, dass damit

$$\sqrt{1 + z'^2} = \sqrt{1 + \sinh^2(Dx + c)} = \cosh(Dx + c) \tag{27}$$

gilt. Die linke Seite wird also zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\tanh(Dx + c)\left(\frac{\rho g}{D}\cosh(Dx + c) + \rho g h - \lambda\right)\right] \tag{28}$$

$$= \frac{\rho g}{\cosh(Dx + c)} + \frac{\rho g h - \lambda}{\cosh^2(Dx + c)} + \frac{\rho g \sinh^2(Dx + c)}{\cosh(Dx + c)} \tag{29}$$

$$= \rho g \cosh(Dx + c) + \frac{\rho g h - \lambda}{\cosh^2(Dx + c)}, \tag{30}$$

womit die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt ist für $\rho g h = \lambda$. $z(x) = \cosh(Dx + c)/D + \lambda/(\rho g)$ ist damit ein Minimum des Funktionals $U - \lambda K$. Die Parameter D, c und λ könnte man nun genau wie auf Blatt 1 mithilfe der Randbedingungen bestimmen.