Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Blatt 5
Abgabe 26.05.2023, Besprechung 06.06.2023

---

1. Symmetrie des Potenzials $U(r) = \alpha/r^2$ **(5 Punkte)**

Zeigen Sie mithilfe des Noethertheorems für infinitesimale Transformationen, dass die Wirkung für ein Teilchen in drei Dimensionen im Potenzial $U(r) = \alpha/r^2$ ($r = |\boldsymbol{r}|$) mit Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{\alpha}{r^2}$$

invariant ist unter der einparametrigen Transformation

$$\boldsymbol{r}^* = \lambda\boldsymbol{r}, \;\; t^* = \lambda^2 t$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Geben Sie die zugehörige Erhaltungsgröße Q an und vereinfachen Sie diese mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes. Überprüfen Sie explizit mithilfe der Bewegungsgleichungen, dass $dQ/dt = 0$.

2. Prinzip der kleinsten Wirkung **(8 Punkte)**

Betrachten Sie eine eindimensionale Bewegung mit festen Anfangs- und Endpunkten $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$. Bestimmen Sie die Bahnkurven und berechnen Sie die Wirkung $S(x_1, t_2; x_2, t_2)$ und ihre Ableitungen $\partial S/\partial x_2; \partial S/\partial t_2$ in den drei Fällen:

a) Freies Teilchen der Masse m (2 Punkte)
b) Ein Teilchen im Schwerefeld der Erde (d.h. in einem Potential $U(x) = -mgx$) (2 Punkte)
c) Harmonischer Oszillator (ein Teilchen im quadratischen Potential $U(x) = m\omega^2 x^2/2$) (2 Punkte)

Betrachten Sie nun kleine Ablenkungen $\Delta x(t)$ (nicht mit einer infinitesimalen Variation $x(t)$ zu verwechseln) von den genauen Bahnkurven, die Sie für die drei obengenannten Fälle bestimmt haben. Lassen Sie die Anfangsbedingungen fest: $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$:

d) Zeigen Sie für die Fälle (a) und (b), dass die Wirkung auf der genaue Bahnkurven das absolute Minimum hat, d.h. $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) > 0$ gilt. (2 Punkte)

3. Prinzip der kleinsten Wirkung: Kugel im Schwerefeld **(7 Punkte)**

Der schiefe Wurf einer Kugel der Masse m im Schwerefeld der Erde soll durch Variation aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung berechnet werden. Die Kugel bewegt sich in der $x - z$-Ebene, die Schwerkraft zeigt in negative z-Richtung.

a) Berechnen Sie die Wirkung für die Kugel mit dem Ansatz $x(t) = x_0 + v_x t + at^2$ und $z(t) = z_0 + v_z t + bt^2$. (2 Punkte)
b) Bestimmen Sie die Konstanten des Ansatzes so, dass S extremalisiert wird. Dabei sind die Endpunkte der Bahn einzusetzen $x(0) = z(0) = 0$, $x(T) = x_m$, $z(T) = 0$. *Hinweis*: Mit den Endpunkten gilt $S[\boldsymbol{r}] = S(a, b)$ und für das Extremum muss $\partial S/\partial a = 0$, $\partial S/\partial b = 0$ gelten. (3 Punkte)
c) Bestimmen Sie die Lagrangegleichungen und vergleichen Sie deren spezielle Lösung mit dem Ergebnis aus (b). (2 Punkte)