Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 5
Besprechung 06.06.2023

1. Symmetrie des Potentials $U(\mathbf{r}) = \alpha/r^2$ (5 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des Noethertheorems für infinitesimale Transformationen, dass die Wirkung für ein Teilchen in drei Dimensionen im Potenzial $U(r) = \alpha/r^2$ ($r = |\mathbf{r}|$) mit Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\alpha}{r^2}$$

invariant ist unter der einparametrischen Transformation

$$\mathbf{r}^* = \lambda \mathbf{r}, \quad t^* = \lambda^2 t$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Geben Sie die zugehörige Erhaltungsgröße Q an und vereinfachen Sie diese mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes. Überprüfen Sie explizit mithilfe der Bewegungsgleichungen, dass $dQ/dt = 0$.

Lösungsvorschlag

Wir sehen zunächst, dass für die Wirkung gilt

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\alpha}{r^2} \right) = \lambda^{-2} \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* \left(\frac{m}{2} \left(\frac{\lambda^{-1} d\mathbf{r}^*}{\lambda^{-2} dt^*} \right)^2 - \frac{\alpha}{(\lambda^{-1} r^*)^2} \right) \\ &= \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* \left(\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}^*}{dt^*} \right)^2 - \frac{\alpha}{(r^*)^2} \right), \end{aligned}$$

sie ist also invariant unter der gegebenen Transformation für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns jetzt für infinitesimale Transformationen, $\lambda \approx 1$, also

$$\begin{aligned} \vec{r}^* &= \lambda \vec{r} \simeq (1 + \varepsilon) \vec{r}, \\ t^* &= \lambda^2 t = (1 + \varepsilon)^2 t \simeq (1 + 2\varepsilon) t. \end{aligned}$$

mit $\varepsilon \ll 1$. Vergleichen wir mit Gleichung (72) aus dem Vorlesungsskript, ist also $\psi = \mathbf{r}$ und $\phi = 2t$. Entsprechend lautet die zugehörige Erhaltungsgröße

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \mathbf{r} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) 2t = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - 2Et,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = m\dot{\mathbf{r}}^2 - L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\alpha}{r^2} \equiv E \tag{1}$$

gerade die Energie des Systems ist.

Prüfen wir schließlich, dass $dQ/dt = 0$:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - 2Et) = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - 2E = \frac{2\alpha}{r^2} + m\dot{\mathbf{r}}^2 - 2 \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\alpha}{r^2} \right) = 0,$$

da mit der Euler-lagrange-Gleichung

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} = \frac{2\alpha}{r^2}.$$

2. Prinzip der kleinsten Wirkung

(8 Punkte)

Betrachten Sie eine eindimensionale Bewegung mit festen Anfangs- und Endpunkten $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$. Bestimmen Sie die Bahnkurven und berechnen Sie die Wirkung $S(x_1, t_2; x_2, t_2)$ und ihre Ableitungen $\partial S/\partial x_2; \partial S/\partial t_2$ in den drei Fällen:

- Freies Teilchen der Masse m (2 Punkte)
- Ein Teilchen im Schwerfeld der Erde (d.h. in einem Potential $U(x) = -mgx$) (2 Punkte)
- Harmonischer Oszillator (ein Teilchen im quadratischen Potential $U(x) = m\omega^2 x^2/2$) (2 Punkte)

Betrachten Sie nun kleine Ablenkungen $\Delta x(t)$ (nicht mit einer infinitesimalen Variation $x(t)$ zu verwechseln) von den genauen Bahnkurven, die Sie für die drei obengenannten Fälle bestimmt haben. Lassen Sie die Anfangsbedingungen fest: $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$:

- Zeigen Sie für die Fälle (a) und (b), dass die Wirkung auf der genauen Bahnkurven das absolute Minimum hat, d.h. $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) > 0$ gilt. (2 Punkte)

Lösungsvorschlag

- Die Bewegungsgleichung eines freien Teilchens lautet

$$m\ddot{x} = 0.$$

Zweimalige Integration dieser Gleichung von t_1 bis t mit den Definitionen $\dot{x}(t_1) = v_0$, $x(t_1) = x_1$ ergibt

$$x(t) = x_1 + v_0(t - t_1).$$

Um v_0 zu bestimmen benutzen wir nun $x(t_2) = x_2$.

$$x(t) = x_1 + v_0(t - t_1).$$

Damit ist die Lösung mit der Randbedingungen $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ also gegeben durch

$$x(t) = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}(t - t_1).$$

Die Lagrange-Funktion auf dieser Bahnkurve lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2}.$$

Die Wirkung ist damit

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1}.$$

Die Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_2} &= m \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = mv_0, \\ \frac{\partial S}{\partial t_2} &= -\frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} = -\frac{mv_0^2}{2}. \end{aligned}$$

b) Die Bewegungsgleichung eines Teilchens im Schwerfeld der Erde ist

$$m\ddot{x} = mg = F.$$

Analoges Vorgehen (Integration) zu (a) liefert als Lösung mit der Randbedingungen $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$

$$x(t) = x_1 + v_0(t - t_1) + F \frac{(t - t_1)^2}{2m},$$

wobei

$$v_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - F \frac{t_2 - t_1}{2m}.$$

Die Lagrange-Funktion auf dieser Bahnkurve ($U = -Fx$) lautet somit

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + Fx(t) = \frac{m}{2} \frac{v_0^2}{2} + Fx_1 + 2v_0F(t - t_1) + \frac{F^2}{m}(t - t_1)^2.$$

Die Wirkung ist somit

$$S = \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \frac{F}{2}(x_1 + x_2)(t_2 - t_1) - \frac{F^2}{24m}(t_2 - t_1)^3.$$

Die Ableitungen sind hier gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_2} &= m \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \frac{F}{2}(t_2 - t_1) = m\dot{x}(t_2), \\ \frac{\partial S}{\partial t_2} &= -\frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} + \frac{F}{2}(x_1 + x_2) - \frac{F^2}{8m}(t_2 - t_1)^2 = -\frac{mv_0^2}{2} + Fx_1. \end{aligned}$$

c) Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators ($U = m\omega^2 x^2/2$) lautet

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x.$$

Die Lösung mit den Randbedingungen $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ ist

$$x(t) = x_1 \cos \omega(t - t_1) + A \sin \omega(t - t_1),$$

mit

$$A = \frac{x_2 - x_1 \cos \omega(t_2 - t_1)}{\sin \omega(t_2 - t_1)}.$$

Die Wirkung ist damit

$$\begin{aligned} S &= \frac{m\omega}{2} [(x_2 - x_1 \cos \omega(t_2 - t_1))^2 \cot \omega(t_2 - t_1) \\ &\quad + x_1^2 \sin \omega(t_2 - t_1) \cos \omega(t_2 - t_1) - 2x_1 x_2 \sin \omega(t_2 - t_1)]. \end{aligned}$$

Die Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_2} &= m\omega [(x_2 - x_1 \cos \omega(t_2 - t_1)) \cot \omega(t_2 - t_1) - x_1 \sin \omega(t_2 - t_1)] = m\dot{x}(t_2), \\ \frac{\partial S}{\partial t_2} &= -\frac{m}{2} \dot{x}^2(t_2) - \frac{m}{2} \omega^2 x^2(t_2). \end{aligned}$$

Die Ableitung nach der Zeit t_2 ergibt $\partial S/\partial t_2 = -E$, wobei E die Energie ist. Die Ableitung nach dem Ort x_2 ergibt $\partial S/\partial x_2 = p(t_2)$, den Impuls im Punkt x_2 .

d) Für Fall (a) ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta S &= S(x + \Delta x) - S(x) = \frac{m}{2} \left[\int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{x}(t) + \Delta \dot{x}(t))^2 - \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{x}(t))^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} \left[\int_{t_1}^{t_2} dt (\Delta \dot{x}(t))^2 + 2 \int_{t_1}^{t_2} dt (\dot{x}(t) \Delta \dot{x}(t)) \right] = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt (\Delta \dot{x}(t))^2,\end{aligned}$$

wobei partielle Integration benutzt wurde, mit Bedingungen $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$ und $m\ddot{x} = 0$. Es ist somit klar, dass die Wirkung auf der wahren Bahnkurve ein absolutes Minimum besitzt, da für beliebiges $\Delta x(t)$ die Differenz ΔS positiv ist.

Für den Fall (b) ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} (\dot{x}(t) + \Delta \dot{x}(t))^2 + mg(x(t) + \Delta x(t)) \right] - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{m}{2} (\dot{x}(t))^2 + mgx(t) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt m\dot{x}(t)\Delta \dot{x}(t) + \int_{t_1}^{t_2} dt mg\Delta x(t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} (\Delta \dot{x}(t))^2 \\ &= [m\dot{x}\Delta x] \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt (mg - m\ddot{x})\Delta x(t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} (\Delta \dot{x}(t))^2 = \frac{m}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt (\Delta \dot{x}(t))^2 > 0,\end{aligned}$$

wobei wieder partielle Integration benutzt wurde, $\Delta x(t_1) = \Delta x(t_2) = 0$ und die Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = mg$.

3. Prinzip der kleinsten Wirkung: Kugel im Schwerfeld (7 Punkte)

Der schiefe Wurf einer Kugel der Masse m im Schwerfeld der Erde soll durch Variation aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung berechnet werden. Die Kugel bewegt sich in der $x - z$ -Ebene, die Schwerkraft zeigt in negative z -Richtung.

- Berechnen Sie die Wirkung für die Kugel mit dem Ansatz $x(t) = x_0 + v_x t + at^2$ und $z(t) = z_0 + v_z t + bt^2$. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie die Konstanten des Ansatzes so, dass S extremalisiert wird. Dabei sind die Endpunkte der Bahn einzusetzen $x(0) = z(0) = 0$, $x(T) = x_m$, $z(T) = 0$. *Hinweis:* Mit den Endpunkten gilt $S[\mathbf{r}] = S(a, b)$ und für das Extremum muss $\partial S/\partial a = 0$, $\partial S/\partial b = 0$ gelten. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die Lagrangegleichungen und vergleichen Sie deren spezielle Lösung mit dem Ergebnis aus (b). (2 Punkte)

Lösungsvorschlag

- Die Lagrange-Funktion ist

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Ansatz für die zu variierende Bahn in der Wirkung:

$$x(t) = x_0 + v_x t + at^2, \quad z(t) = z_0 + v_z t + bt^2.$$

Einsetzen in die Wirkung ergibt

$$S = \int_0^T dt L = \frac{m}{2} \left[A_0 T + \frac{A_1}{2} T^2 + \frac{A_2}{3} T^3 \right],$$

mit $A_0 = v_x^2 + v_z^2 - 2gz_0$, $A_1 = 4v_x a + 4v_z b - 2gv_z$, $A_2 = 4a^2 + 4b^2 - 2gb$.

- b) $x(0) = z(0) = 0$, $x(T) = x_m, z(T) = 0$, daraus folgt für den Ansatz von oben: $x_0 = z_0 = 0$, $v_x = \frac{x_m}{T} - aT$, $v_z = -bT$. Jetzt sind nur noch a, b unbestimmt. Die Bahn in S wird also durch a, b festgelegt, und die Bahn in S zu variieren heißt jetzt, a und b zu variieren. S ist extremal, wenn diese Variation verschwindet, also $\partial S/\partial a = 0$, $\partial S/\partial b = 0$. Man muss beim Ableiten beachten, dass v_x und v_z von a und b abhängen:

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = \frac{m}{2} \left[(2v_x \frac{\partial v_x}{\partial a})T + (4v_x + 4a \frac{\partial v_x}{\partial a}) \frac{T^2}{2} + 8a \frac{T^3}{3} \right],$$

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = \frac{m}{2} \left[(2v_z \frac{\partial v_z}{\partial b})T + (4v_z + 4b \frac{\partial v_z}{\partial b} - 2g \frac{\partial v_z}{\partial b}) \frac{T^2}{2} + (8b - 2g) \frac{T^3}{3} \right].$$

Einsetzen von $\frac{\partial v_x}{\partial a} = -T$, $\frac{\partial v_z}{\partial b} = -T$ und liefert

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = \frac{mT^3 a}{3}, \quad \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = \frac{mT^3}{3} (b + \frac{g}{2})$$

und die physikalische Bahn der Kugel lautet, mit $v_x = x_m/T$, $v_z = gT/2$,

$$x(t) = v_x t = \frac{x_m}{T} t, \quad z(t) = v_z t - \frac{g}{2} t^2 = \frac{g}{2} (tT - t^2).$$

- c) Die Bahn, die die Wirkung extremalisiert, wird durch die Euler-Lagrange-Gleichungen bestimmt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_x t, \quad z(t) = z_0 + v_z t - \frac{g}{2} t^2.$$

Die Randbedingungen (Endpunkte für $t = 0$ und $t = T$) legen die Integrationskonstanten x_0, z_0, v_x, v_z fest, wie in b):

$$\dot{x}(0) = v_x = x_m/T, \quad \dot{z}(0) = v_z gT/2,$$

dann

$$T = \frac{2v_z}{g}, \quad x_m = \frac{2}{g} v_x v_z.$$