Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman

Dr. A. Pavlov, A. Reich

Blatt 6

Abgabe 09.06.2023, Besprechung 13.06.2023

Aufgrund der vorlesungsfreien Woche muss dieses Blatt erst am 09.06. abgegeben werden!

1. Erweitertes Noether-Theorem – Laplace-Runge-Lenz-Vektor (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie zunächst die Bewegungsgleichungen zur Lagrangefunktion

$$L'(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{q}, t) \tag{1}$$

und zeigen Sie, dass sie äquivalent sind zu denen, die aus der Lagrangefunktion $L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ folgen. (2 Punkte)

Wir wollen nun ein Teilchen mit Masse m in drei Dimensionen im Zentralpotential $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ betrachten (wobei $r = |\boldsymbol{r}|$). Es sei eine infinitesimale Transformation mit zeitlich konstanten Parametern $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ durch

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}, \quad t^* = t \quad \text{mit} \quad \delta\boldsymbol{r} = 2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})\dot{\boldsymbol{r}} - (\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r} \tag{2}$$

gegeben.

b) Zeigen Sie (mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung), dass

$$\delta L \equiv L(\boldsymbol{r}^*, \dot{\boldsymbol{r}}^*) - L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{2\alpha}{r}\left(\boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - \frac{(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{r^2}\right). \tag{3}$$

Schreiben Sie δL in der Form $\delta L = \frac{d}{dt} f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{b})$. (4 Punkte)

c) Aus dem (erweiterten) Noether-Theorem folgt nun, dass

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} \cdot \delta\boldsymbol{r} - f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{b}) \equiv 2\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{A}, \tag{4}$$

und damit $\boldsymbol{A}$, eine Erhaltungsgröße ist. Bestimmen Sie einen Ausdruck für $\boldsymbol{A}$ und überzeugen Sie sich davon, dass es sich hierbei um den Laplace-Runge-Lenz-Vektor $\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L} - \alpha\hat{\boldsymbol{e}}_r$ handelt (mit Drehimpuls $\boldsymbol{L}$). (2 Punkte)

2. Legendre-Transformation (6 Punkte)

Es sei $f(x)$ eine konvexe Funktion, d.h. $f''(x) > 0$ für alle x im Definitionsbereich D. Weiter sei $y(x) = px$ eine Gerade mit Steigung p. Mit $x(p) = x_p$ bezeichnen wir den Punkt, an dem die Funktion $f(x)$ am weitesten von der Gerade in vertikaler Richtung entfernt ist, d.h., die Funktion $F(p, x) = px - f(x)$ ist maximal bzgl. x bei $x = x_p$. Die Legendre-Transformierte $g(p)$ von $f(x)$ ist nun definiert als $g(p) = F(p, x_p)$.

Kompakt ausgedrückt heißt das

$$g(p) = \sup_{x\in D}(px - f(x)), \tag{5}$$

wobei sup das Supremum bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $g(p)$ ebenfalls eine konvexe Funktion ist. (2 Punkte)

Hinweis: Die Ableitung einer inversen Funktion $f^{-1}(x)$ kann ausgedrückt werden mittels $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$.

b) Berechnen Sie die Legendre-Transformierten der Funktionen $f_1(x) = x^4/4$ sowie $f_2(x) = e^x$. (2 Punkte)

c) Wie lässt sich die Legendre-Transformation mittels der Menge aller Tangenten an $f(x)$ geometrisch interpretieren? (2 Punkte)

3. Hamilton-Formalismus **(6 Punkte)**

Die Hamiltonfunktion ist die Legendre-Transformierte (bzgl. $\dot{\boldsymbol{r}}$) der Lagrangefunktion eines Systems. Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele jeweils die verallgemeinerten Impulse, die Hamiltonfunktion sowie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

a) Teilchen mit Ladung q im elektromagnetischen Feld (siehe Blatt 3)

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^{\,2} - q\phi(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \qquad \text{(3 Punkte)} \tag{6}$$

b) Freies relativistisches Teilchen mit Ruhemasse m (siehe Blatt 4)

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = -mc^2\sqrt{1 - \dot{\boldsymbol{r}}^2/c^2} \qquad \text{(3 Punkte)} \tag{7}$$