Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 6
Besprechung 13.06.2023

1. Erweitertes Noether-Theorem – Laplace-Runge-Lenz-Vektor (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie zunächst die Bewegungsgleichungen zur Lagrangefunktion

$$L'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{d}{dt}f(\mathbf{q}, t) \quad (1)$$

und zeigen Sie, dass sie äquivalent sind zu denen, die aus der Lagrangefunktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ folgen. (2 Punkte)

Wir wollen nun ein Teilchen mit Masse m in drei Dimensionen im Zentralpotential $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ betrachten (wobei $r = |\mathbf{r}|$). Es sei eine infinitesimale Transformation mit zeitlich konstanten Parametern $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ durch

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, \quad t^* = t \quad \text{mit} \quad \delta\mathbf{r} = 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} \quad (2)$$

gegeben.

b) Zeigen Sie (mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung), dass

$$\delta L \equiv L(\mathbf{r}^*, \dot{\mathbf{r}}^*) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{2\alpha}{r} \left(\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^2} \right). \quad (3)$$

Schreiben Sie δL in der Form $\delta L = \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}, \mathbf{b})$. (4 Punkte)

c) Aus dem (erweiterten) Noether-Theorem folgt nun, dass

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta\mathbf{r} - f(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \equiv 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{A}, \quad (4)$$

und damit $\mathbf{A}$, eine Erhaltungsgröße ist. Bestimmen Sie einen Ausdruck für $\mathbf{A}$ und überzeugen Sie sich davon, dass es sich hierbei um den Laplace-Runge-Lenz-Vektor $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - \alpha \hat{\mathbf{e}}_r$ handelt (mit Drehimpuls $\mathbf{L}$). (2 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Mit $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}$ folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right) \quad (5)$$

sowie

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right), \quad (6)$$

womit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{q}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad (7)$$

wobei wir in (5) genutzt haben, dass

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} \right) \right]_i. \quad (8)$$

b) Es ist $L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\alpha}{r}$. Wir benötigen also zum einen

$$(\dot{\mathbf{r}}^*)^2 = (\dot{\mathbf{r}} + \delta\dot{\mathbf{r}})^2 \simeq \dot{\mathbf{r}}^2 + 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}, \quad (9)$$

wobei

$$\delta\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\delta\mathbf{r} = 2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})\ddot{\mathbf{r}} + (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}^2\mathbf{b} - (\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \ddot{\mathbf{r}})\mathbf{r}. \quad (10)$$

Nutzen wir die Euler-Lagrange-Gleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$, um $\ddot{\mathbf{r}}$ zu ersetzen, finden wir

$$\frac{m}{2}((\dot{\mathbf{r}}^*)^2 - \dot{\mathbf{r}}^2) = \frac{\alpha}{r} \left(\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^2} \right). \quad (11)$$

Zum anderen benötigen wir

$$\frac{1}{|\mathbf{r}^*|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}}} \simeq \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{r}})r^2}{r^3}, \quad (12)$$

womit

$$\alpha \left(\frac{1}{r^*} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\alpha}{r} \left(\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^2} \right). \quad (13)$$

Nehmen wir beide Ergebnisse zusammen, folgt das Gesuchte

$$\delta L \equiv L(\mathbf{r}^*, \dot{\mathbf{r}}^*) - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{2\alpha}{r} \left(\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^2} \right). \quad (14)$$

Definieren wir $f(\mathbf{r}, \mathbf{b}) = 2\alpha \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}{r}$, gilt außerdem $\frac{d}{dt}f = \delta L$.

Wie wir im Aufgabenteil a) gesehen haben, verändert die hier gegebene Transformation damit nicht die Bewegungsgleichungen und ist eine Symmetrie des Systems.

c) Aus dem Noether-Theorem folgt mit dieser Symmetrie, dass

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta\mathbf{r} - f(\mathbf{r}, \mathbf{b}) \right] = \frac{d}{dt} [2\mathbf{b} \cdot (m\dot{\mathbf{r}}^2\mathbf{r} - m(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} - \alpha\mathbf{r}/r)] = 0. \quad (15)$$

Da $\mathbf{b}$ beliebig war, folgt daraus direkt

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = m\dot{\mathbf{r}}^2\mathbf{r} - m(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} - \alpha\mathbf{r}/r. \quad (16)$$

Mit $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ und der Identität $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ lässt sich schließlich zeigen, dass es sich bei dieser Erhaltungsgröße tatsächlich um den Laplace-Runge-Lenz-Vektor handelt.

2. Legendre-Transformation

(6 Punkte)

Es sei $f(x)$ eine konvexe Funktion, d.h. $f''(x) > 0$ für alle x im Definitionsbereich D . Weiter sei $y(x) = px$ eine Gerade mit Steigung p . Mit $x(p) = x_p$ bezeichnen wir den Punkt, an dem die Funktion $f(x)$ am weitesten von der Gerade in vertikaler Richtung entfernt ist, d.h., die Funktion $F(p, x) = px - f(x)$ ist maximal bzgl. x bei $x = x_p$. Die Legendre-Transformierte $g(p)$ von $f(x)$ ist nun definiert als $g(p) = F(p, x_p)$.

Kompakt ausgedrückt heißt das

$$g(p) = \sup_{x \in D} (px - f(x)), \quad (17)$$

wobei sup das Supremum bezeichnet.

- a) Zeigen Sie, dass $g(p)$ ebenfalls eine konvexe Funktion ist. (2 Punkte)
Hinweis: Die Ableitung einer inversen Funktion $f^{-1}(x)$ kann ausgedrückt werden mittels $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$.
- b) Berechnen Sie die Legendre-Transformierten der Funktionen $f_1(x) = x^4/4$ sowie $f_2(x) = e^x$. (2 Punkte)
- c) Wie lässt sich die Legendre-Transformation mittels der Menge aller Tangenten an $f(x)$ geometrisch interpretieren? (2 Punkte)

Lösungsvorschlag

- a) Zunächst wissen wir $\frac{\partial}{\partial x}F(p, x)|_{x=x_p} = p - f'(x_p) = 0$, also $f'(x_p) = p$ bzw. $x_p = (f')^{-1}(p)$. (Da $f''(x_p) > 0$ ist dieser extreme Punkt sicher ein Maximum.) Nun folgt

$$g'(p) = x_p + p \frac{\partial x_p}{\partial p} - \underbrace{f'(x_p)}_{=p} \frac{\partial x_p}{\partial p} = x_p \quad (18)$$

$$\Rightarrow g''(p) = \frac{\partial x_p}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}(f')^{-1}(p) = \frac{1}{f''((f')^{-1}(p))} = \frac{1}{f''(x_p)} > 0, \quad (19)$$

wobei wir die Formel aus dem Hinweis verwendet haben.

- b) Wir benötigen das Maximum bzgl. x der Funktion $F_1(p, x) = px - x^4/4$

$$\frac{\partial}{\partial x}F_1(p, x)|_{x=x_p} = p - x_p^3 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_p = p^{1/3}. \quad (20)$$

Damit folgt für die Legendre-Transformierte

$$g_1(p) = F_1(p, x_p) = p^{4/3} - \frac{p^{4/3}}{4} = \frac{3p^{4/3}}{4}. \quad (21)$$

Genauso finden wir für die zweite Funktion

$$\frac{\partial}{\partial x}F_2(p, x)|_{x=x_p} = p - e^{x_p} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_p = \ln p. \quad (22)$$

Also

$$g_2(p) = p \ln p - p = p(\ln p - 1). \quad (23)$$

- c) Die Bedingung $\frac{\partial}{\partial x}F(p, x)|_{x=x_p} = p - f'(x_p) = 0$ bestimmt für jede Steigung p der Geraden den Punkt x_p der Kurve $f(x)$, an dem die Kurve die gleiche Steigung wie die Gerade hat. Damit ist $y_t(x) = p \cdot (x - x_p) + f(x_p)$ eine Tangente an $f(x)$. Die Legendre-Transformierte $g(p) = px_p - f(x_p)$ ist nun gerade der negative y -Achsenabschnitt dieser Tangente. Im Zuge der Legendre-Transformation wird die Kurve $f(x)$ also als Einhüllende aller ihrer Tangenten beschrieben, wobei durch die Legendre-Transformierte jeder möglichen Steigung der Tangenten der entsprechende y -Achsenabschnitt zugeordnet wird.

3. Hamilton-Formalismus

(6 Punkte)

Die Hamiltonfunktion ist die Legendre-Transformierte (bzgl. $\dot{\mathbf{r}}$) der Lagrangefunktion eines Systems. Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele jeweils die verallgemeinerten Impulse, die Hamiltonfunktion sowie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

- a) Teilchen mit Ladung q im elektromagnetischen Feld (siehe Blatt 3)

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q\phi(\mathbf{r}, t) + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (3 \text{ Punkte}) \quad (24)$$

- b) Freies relativistisches Teilchen mit Ruhemasse m (siehe Blatt 4)

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2/c^2} \quad (3 \text{ Punkte}) \quad (25)$$

Lösungsvorschlag

a) Der verallgemeinerte Impuls lautet

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{q}{mc}\mathbf{A}. \quad (26)$$

Damit folgt die Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) - L(\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t), \mathbf{r}, t) \\ &= \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{q}{mc}\mathbf{A} \right) - \frac{m}{2} \left(\frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{q}{mc}\mathbf{A} \right)^2 + q\phi - \frac{q}{c} \left(\frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{q}{mc}\mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right)^2 + q\phi. \end{aligned} \quad (27)$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right), \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{q}{mc} \sum_j \left(p_j - \frac{q}{c}A_j \right) \cdot \frac{\partial A_j}{\partial \mathbf{r}} - q \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}}. \quad (28)$$

b) Der verallgemeinerte Impuls ist gegeben durch

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2/c^2}}. \quad (29)$$

Die Hamiltonfunktion ist also

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = \frac{\mathbf{p}^2}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2 + \mathbf{p}^2}} \\ &= \frac{c^2\mathbf{p}^2}{\sqrt{m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2}} + m^2 \sqrt{\frac{1}{m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2}} = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4}. \end{aligned} \quad (30)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten damit

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{c^2\mathbf{p}}{\sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (31)$$