Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman

Dr. A. Pavlov, A. Reich

Blatt 7

Abgabe 16.06.2023, Besprechung 20.06.2023

---

1. Hamilton-Funktionen - Quadratische Formen **(6 Punkte)**

Bestimmen Sie für die folgenden Fälle jeweils die Hamilton-Funktion:

a) Massenpunkt auf einer Kugel (2 Punkte)

$$L(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \theta, \phi) = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) + mgl\cos\theta$$

b) Pendel mit beweglicher Aufhängung an einer Feder (Blatt 2) (2 Punkte)

$$L(\dot{x}, \dot{\theta}, x, \theta) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2$$

c) ebenes Doppelpendel (Blatt 3) (2 Punkte)

$$L(\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2)$$
$$+(m_1+m_2)gl\cos\phi_1 + m_2gl\cos\phi_2$$

2. Legendre-Transformation in zwei Variablen **(6 Punkte)**

Gegeben sei die Lagrange-Funktion eines zwei-dimensionalen Systems

$$L(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + m\omega x\dot{y}.$$

Es sei angemerkt, dass die kinetische Energie hier nicht als quadratische Form in den Geschwindigkeiten vorliegt.

a) Wie lautet die zugehörige Hamilton-Funktion $H(p_x, p_y, x, y)$? (3 Punkte)

b) Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese. Hinweis: Vergewissen Sie sich, dass Ihre Lösungen tatsächlich alle Bewegungsgleichungen erfüllen. (3 Punkte)

3. Phasenraum eines mathematischen Pendels **(8 Punkte)**

a) Skizzieren Sie die Trajektorien eines mathematischen Pendels (Massepunkt der Masse m im Potential $U = -mgl\cos\theta$) im Phasenraum (θ, p_θ). Unterscheiden Sie dabei die Fälle $E < mgl$ und $E > mgl$. (3 Punkte)

b) Finden Sie die Jacobi-Matrix für die infinitesimale Abbildung

$$(\theta(t), p_\theta(t)) \to (\theta(t+dt), p_\theta(t+dt)).$$

Vergewissern Sie sich, dass der Satz von Liouville erfüllt ist. Skizzieren Sie für die Fälle $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ und $\theta = \pi$ wie sich ein infinitesimales Volumenelement des Phasenraums $(\Delta\theta, \Delta p_\theta)$ unter solch einer Transformation verhält. (5 Punkte)