Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 7
Besprechung 20.06.2023

---

1. Hamilton-Funktionen - Quadratische Formen (6 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Fälle jeweils die Hamilton-Funktion:

a) Massenpunkt auf einer Kugel (2 Punkte)

$$L(\dot{\theta},\dot{\phi},\theta,\phi)=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)+mgl\cos\theta$$

b) Pendel mit beweglicher Aufhängung an einer Feder (Blatt 2) (2 Punkte)

$$L(\dot{x},\dot{\theta},x,\theta)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)+mgl\cos\theta-\frac{1}{2}kx^2$$

c) ebenes Doppelpendel (Blatt 3) (2 Punkte)

$$L(\dot{\phi}_1,\dot{\phi}_2,\phi_1,\phi_2)=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\dot{\phi}_1^2+\frac{1}{2}m_2l^2\dot{\phi}_2^2+m_2l^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2)$$
$$+(m_1+m_2)gl\cos\phi_1+m_2gl\cos\phi_2$$

Lösungsvorschlag

Vorbemerkung: Ist die Lagrangefunktion eine quadratische Form, d.h.

$$L(q_i,\dot{q}_i)=\frac{1}{2}\sum_{nm}T_{nm}\dot{q}_n\dot{q}_m-U(\vec{q}).$$

mit $T_{mn}=T_{nm}$, so ergibt sich die Hamiltonfunktion aus

$$p_n=\sum_m T_{nm}\dot{q}_m\rightarrow\dot{q}_m=\sum_n\left(T^{-1}\right)_{mn}p_n,$$

zu

$$H=\frac{1}{2}\sum_{nm}\left(T^{-1}\right)_{nm}p_np_m+U(\vec{q}).$$

a)

$$H=\frac{p_\theta^2}{2ml^2}+\frac{p_\phi^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta;$$

b)

$$H=\frac{1}{2m\sin^2\theta}\left(p_x^2+\frac{p_\theta^2}{l^2}-2\frac{\cos\theta}{l}p_xp_\theta\right)-mgl\cos\theta+\frac{1}{2}kx^2;$$

c)

$$H=\frac{1}{2m_2l^2(m_1+m_2\sin^2(\phi_1-\phi_2))}\left[m_2p_{\phi_1}^2+(m_1+m_2)p_{\phi_2}^2-2m_2p_{\phi_1}p_{\phi_2}\cos(\phi_1-\phi_2)\right]$$
$$-(m_1+m_2)gl\cos\phi_1-m_2gl\cos\phi_2.$$

2. Legendre-Transformation in zwei Variablen (6 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Funktion eines zwei-dimensionalen Systems

$$L(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + m\omega x\dot{y}.$$

Es sei angemerkt, dass die kinetische Energie hier nicht als quadratische Form in den Geschwindigkeiten vorliegt.

a) Wie lautet die zugehörige Hamilton-Funktion $H(p_x, p_y, x, y)$? (3 Punkte)

b) Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese. Hinweis: Vergewissen Sie sich, dass Ihre Lösungen tatsächlich alle Bewegungsgleichungen erfüllen. (3 Punkte)

Lösungsvorschlag

a)

$$p_x = m\dot{x}, \;\; p_y = m\dot{y} + m\omega x$$
$$\Rightarrow \quad H(p_x, p_y, x, y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \omega x p_y.$$

b) Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x + \omega p_y, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m},$$
$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m} - \omega x.$$

Ableiten der ersten dieser Gleichungen und Einsetzen der zweiten und dritten ergibt

$$\ddot{p}_x = -m\omega^2\dot{x} + \omega\dot{p}_y \quad \Rightarrow \quad \ddot{p}_x + \omega^2 p_x = 0 \quad \Rightarrow \quad p_x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

womit außerdem folgt

$$x(t) = \frac{A}{m\omega}\sin(\omega t + \phi) + x_0.$$

Wir wissen weiterhin

$$p_y = \text{konst.} \equiv mv_0$$

und können daraus folgern

$$\dot{y} = v_0 - \omega x_0 - \frac{A}{m}\sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{A}{m\omega}\cos(\omega t + \phi) + (v_0 - \omega x_0)t + y_0.$$

Nun haben wir mit $\{A, \phi, v_0, x_0, y_0\}$ allerdings fünf freie Konstanten für nur vier DGLs erster Ordnung, sie können also nicht alle unabhängig voneinander sein. Setzen wir unsere gefundenen Lösungen in die erste der Bewegunsgleichungen ein, so folgt

$$-A\omega\sin(\omega t + \phi) = -m\omega^2\left(\frac{A}{m\omega}\sin(\omega t + \phi) + x_o\right) + \omega m v_0 \Rightarrow \quad v_0 = \omega x_0$$

und die Lösungen für p_y und y lassen sich zu

$$p_y(t) = m\omega x_0, \quad y(t) = y_0 + \frac{A}{m\omega}\cos(\omega t + \phi)$$

umschreiben.

3. Phasenraum eines mathematischen Pendels (8 Punkte)

a) Skizzieren Sie die Trajektorien eines mathematischen Pendels (Massepunkt der Masse m im Potential $U = -mgl\cos\theta$) im Phasenraum (θ, p_θ). Unterscheiden Sie dabei die Fälle $E < mgl$ und $E > mgl$. (3 Punkte)

b) Finden Sie die Jacobi-Matrix für die infinitesimale Abbildung

$$(\theta(t), p_\theta(t)) \to (\theta(t+dt), p_\theta(t+dt)).$$

Vergewissern Sie sich, dass der Satz von Liouville erfüllt ist. Skizzieren Sie für die Fälle $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ und $\theta = \pi$ wie sich ein infinitesimales Volumenelement des Phasenraums $(\Delta\theta, \Delta p_\theta)$ unter solch einer Transformation verhält. (5 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Es gilt

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

und

$$H = E = \frac{p_\theta^2}{2m} - mgl\cos\theta,$$

womit folgt

$$p_\theta = \pm\sqrt{2ml^2}\sqrt{E + mgl\cos\theta}.$$

Für $E < mgl$ schwingt das Pendel. Die Trajektorien im Phasenraum sind geschlossene Kurven, die im Uhrzeigersinn durchlaufen werden (blaue Kurven in Abb. 1). Für $E = mgl$ reicht der mögliche Variationsbereich der Lagekoordinate θ von der Vertikalen ($\theta = \pm\pi$) bis wieder zur Vertikalen. Die Schwingungsdauer ist aber unendlich. Deswegen durchläuft der Phasenpunkt in Abb. 1 (rote Kurve) nur einen Teil des oberen oder des unteren Asts der Phasenbahn. Diese Limitationsbewegung trennt die Schwingungen von den Rotationen des Pendels, die für $E > mgl$ eintreten. Letzteren entsprechen die wellenförmigen Kurven außerhalb der Separatrix im Phasenraumdiagramm (grüne Kurven).

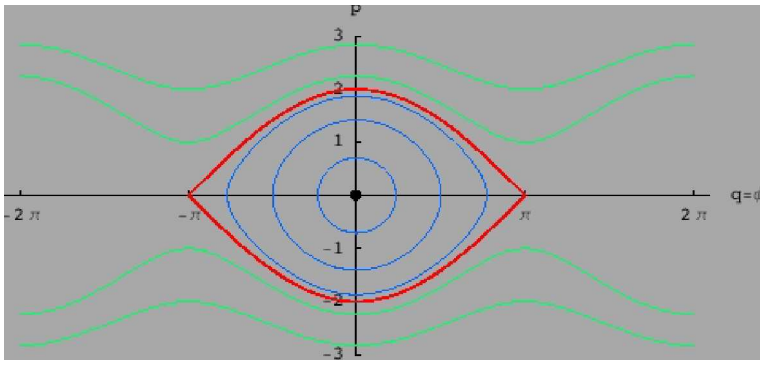

Abbildung 1: Phasenraumdiagramm und Trajektorien des mathematischen Pendels.

b) Für die gesuchte infinitesimale Abbildung gilt

$$\theta(t+dt) = \theta(t) + \dot{\theta}(t)dt = \theta(t) + \frac{\partial H}{\partial p}dt = \theta(t) + \frac{p_\theta(t)}{m}dt,$$

$$p_\theta(t+dt) = p_\theta(t) + \dot{p}_\theta(t)dt = p_\theta(t) - \frac{\partial H}{\partial \theta} = p_\theta(t) + mgl\sin\theta dt.$$

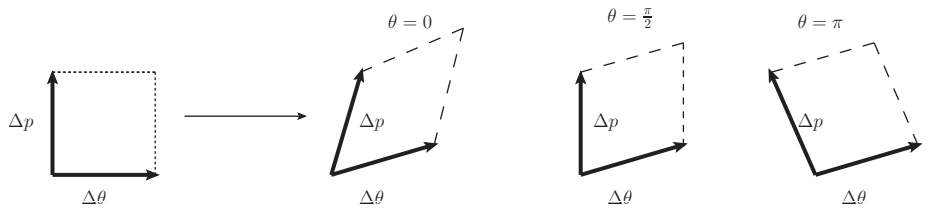

Abbildung 2: Verwandlung des Phasenraum für Falle: $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$.

Mit $\boldsymbol{\Delta y} = (\Delta\theta, \Delta p_\theta)$ können wir dies ausdrücken über eine Jacobi-Matrix als

$$\Delta\tilde{y}_i = \sum_j \frac{\partial \Delta\tilde{y}_i}{\partial \Delta y_j} \Delta y_j \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \Delta\tilde{\theta} \\ \Delta\tilde{p}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{dt}{m} \\ mgl\cos\theta dt & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\theta \\ \Delta p_\theta \end{pmatrix}.$$

Da $\det(...) = 1$ in der führenden Ordnung von dt, ist das Volumen des betrachteten Phasenraumelements konstant, der Satz von Liouville ist also erfüllt. Die Transformationen des infinitesimalen Volumenelementes für verschiedene θ sind in Abb. 2 skizziert.