KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE
DER KONDENSIERTEN MATERIE

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Blatt 8
Abgabe 23.06.2023, Besprechung 27.06.2023

---

1. Poisson-Klammern (7 Punkte)

Die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ zweier Größen $A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ und $B(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ ist definiert als

$$\{A, B\} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right).$$

a) Beweisen Sie die Jacobi-Identität (1 Punkt)

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

b) Es sei $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ der Drehimpuls. Zeigen Sie (jeweils 1 Punkt):

(i) $\{L_i, \boldsymbol{p}^2\} = 0$ (ii) $\{L_i, \boldsymbol{L}^2\} = 0$

(iii) $\{L_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k$ (mit dem Levi-Civita-Symbol ε_{ijk})

Hinweis: Nutzen Sie $\sum_i \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$.

c) Zeigen Sie: Sind A und B Erhaltungsgrößen $\frac{d}{dt}A = 0 = \frac{d}{dt}B$, die explizit von der Zeit abhängen $\frac{\partial}{\partial t}A \neq 0 \neq \frac{\partial}{\partial t}B$, so ist auch $\{A, B\}$ eine Erhaltungsgröße. (2 Punkte)

d) Angenommen, Sie wissen, dass in einem System L_x, L_y und p_z erhalten sind. Welche weiteren Erhaltungsgrößen können Sie daraus folgern? (1 Punkt)

2. Kanonische Transformationen (13 Punkte)

a) Für welche Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist die Transformation

$$Q = q^\alpha p^\beta, \quad P = -q^\gamma p^\delta$$

in einem System mit einem Freiheitsgrad kanonisch? (1 Punkt)

b) Betrachten Sie die kanonische Transformation in einer Dimension gegeben durch $Q = q - pt/m$, $P = p$ für ein freies Teilchen $H = \frac{p^2}{2m}$. Da es sich hierbei um eine explizit zeitabhängige Transformation handelt, ist $H'(Q, P) \neq H(q(Q, P), p(Q, P))$. Nutzen Sie die Bewegungsgleichungen, um die Hamiltonfunktion H' in den transformierten Koordinaten zu finden. (2 Punkte)

Eine kanonische Transformation $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \to (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$ lässt sich durch eine sogenannte erzeugende Funktion $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)$ beschreiben mit

$$\frac{\partial F}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial F}{\partial Q_j} = -P_j, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = H' - H,$$

wobei H' die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten ist. Mehr Einzelheiten und ein Beispiel dazu können Sie im Vorlesungsskript im Abschnitt 6.5 nachlesen.

c) Finden Sie für die beiden kanonischen Transformationen in den Aufgabenteilen a) und b) jeweils die zugehörige erzeugende Funktion. Überprüfen Sie für Aufgabenteil b), dass $\frac{\partial F}{\partial t} = H' - H$ gilt. (4 Punkte)

d) Betrachten Sie ein System in einer Dimension beschrieben durch die Hamiltonfunktion $H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$. Bestimmen Sie die kanonische Transformation, die durch

$$F(q, Q) = Q \arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{2Q}}\right) + \frac{q}{2}\sqrt{2Q - q^2}$$

erzeugt wird und finden Sie die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten (Q, P). Überprüfen Sie, dass $\{Q, P\}_{q,p} = 1$ gilt. Skizzieren Sie die möglichen Trajektorien sowohl im (q, p)- als auch im (Q, P)-Phasenraum. (6 Punkte)

Hinweis: $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$