Karlsruher Institut für Technologie — Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 8
Besprechung 27.06.2023

---

1. Poisson-Klammern (7 Punkte)

Die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ zweier Größen $A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ und $B(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ ist definiert als

$$\{A, B\} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right).$$

a) Beweisen Sie die Jacobi-Identität (1 Punkt)

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

b) Es sei $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ der Drehimpuls. Zeigen Sie (jeweils 1 Punkt):
(i) $\{L_i, \boldsymbol{p}^2\} = 0$ (ii) $\{L_i, \boldsymbol{L}^2\} = 0$
(iii) $\{L_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k$ (mit dem Levi-Civita-Symbol ε_{ijk})
Hinweis: Nutzen Sie $\sum_i \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$.

c) Zeigen Sie: Sind A und B Erhaltungsgrößen $\frac{d}{dt}A = 0 = \frac{d}{dt}B$, die explizit von der Zeit abhängen $\frac{\partial}{\partial t}A \neq 0 \neq \frac{\partial}{\partial t}B$, so ist auch $\{A, B\}$ eine Erhaltungsgröße. (2 Punkte)

d) Angenommen, Sie wissen, dass in einem System L_x, L_y und p_z erhalten sind. Welche weiteren Erhaltungsgrößen können Sie daraus folgern? (1 Punkt)

Lösungsvorschlag

a) Wir nutzen die Notation $\frac{\partial A}{\partial q_j} \equiv A_{q_j}$ und den Fakt, dass partielle Ableitungen kommutieren, also $A_{q_j q_k} = A_{q_k q_j}$ usw. Dann ist

$$\begin{aligned}
\{A, \{B, C\}\} &= \{A, \sum_j (B_{q_j} C_{p_j} - B_{p_j} C_{q_j})\} \\
&= \sum_{j,k} \big[A_{q_k} (B_{q_j p_k} C_{p_j} + B_{q_j} C_{p_j p_k} - B_{p_j p_k} C_{q_j} - B_{p_j} C_{q_j p_k}) \\
&\qquad - A_{p_k} (B_{q_j q_k} C_{p_j} + B_{q_j} C_{p_j q_k} - B_{p_j q_k} C_{q_j} - B_{p_j} C_{q_j q_k}) \big]
\end{aligned}$$

und die anderen beiden Terme folgen daraus jeweils aus der Permutation $A \to B \to C \to A$

$$\begin{aligned}
\{B, \{C, A\}\} &= \sum_{j,k} \big[B_{q_k} (C_{q_j p_k} A_{p_j} + C_{q_j} A_{p_j p_k} - C_{p_j p_k} A_{q_j} - C_{p_j} A_{q_j p_k}) \\
&\qquad - B_{p_k} (C_{q_j q_k} A_{p_j} + C_{q_j} A_{p_j q_k} - C_{p_j q_k} A_{q_j} - C_{p_j} A_{q_j q_k}) \big] \\
\{C, \{A, B\}\} &= \sum_{j,k} \big[C_{q_k} (A_{q_j p_k} B_{p_j} + A_{q_j} B_{p_j p_k} - A_{p_j p_k} B_{q_j} - A_{p_j} B_{q_j p_k}) \\
&\qquad - C_{p_k} (A_{q_j q_k} B_{p_j} + A_{q_j} B_{p_j q_k} - A_{p_j q_k} B_{q_j} - A_{p_j} B_{q_j q_k}) \big] .
\end{aligned}$$

Sammeln wir alle Ausdrücke, die mit A_{q_j} multipliziert werden (in der ersten Summe benennen wir $j \leftrightarrow k$ um), so finden wir

$$\begin{aligned} &B_{q_k p_j} C_{p_k} + B_{q_k} C_{p_k p_j} - B_{p_k p_j} C_{q_k} - B_{p_k} C_{q_k p_j} \\ &\quad - B_{q_k} C_{p_j p_k} + B_{p_k} C_{p_j q_k} + C_{q_k} B_{p_j p_k} - C_{p_k} B_{p_j q_k} = 0. \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt, wenn wir alle Terme addieren, die mit A_{p_j} multipliziert werden

$$\begin{aligned} &- (B_{q_k q_j} C_{p_k} + B_{q_k} C_{p_k q_j} - B_{p_k q_j} C_{q_k} - B_{p_k} C_{q_k q_j}) \\ &\quad + B_{q_k} C_{q_j p_k} - B_{p_k} C_{q_j q_k} - C_{q_k} B_{q_j p_k} + C_{p_k} B_{q_j q_k} = 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir uns schon um 16 der 24 Terme gekümmert. Übrig bleibt

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} (&A_{p_j p_k} B_{q_k} C_{q_j} - A_{q_j p_k} B_{q_k} C_{p_j} - A_{p_j q_k} B_{p_k} C_{q_j} + A_{q_j q_k} B_{p_k} C_{p_j} \\ &A_{q_k p_j} B_{p_k} C_{q_j} - A_{p_k p_j} B_{q_k} C_{q_j} - A_{q_k q_j} B_{p_k} C_{p_j} + A_{p_k q_j} B_{q_k} C_{p_j}) = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also die Jacobi-Identität.

b) Es ist $L_i = \varepsilon_{ijk} r_j p_k$, wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention nutzen, und wir wissen $\{q_j, p_k\} = \delta_{jk}$, $\{q_j, q_k\} = \{p_j, p_k\} = 0$.

(i) $\{L_i, \boldsymbol{p}^2\} = \varepsilon_{ilm} \{r_l p_m, p_j p_j\} = 2\varepsilon_{ilm} \{r_l, p_j\} p_m p_j = 2\varepsilon_{ijm} p_j p_m = 2(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p})_i = 0.$

(ii) $\{L_i, \boldsymbol{L}^2\} = 2\{L_i, L_j\} L_j = 2\varepsilon_{ijk} L_j L_k = 2(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L})_i = 0$, wobei das Ergebnis der (iii), das gleich bewiesen wird, schon genutzt wurde.

(iii) $$\begin{aligned} \{L_i, L_j\} &= \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \{r_k p_l, r_m p_n\} = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (\{p_l, r_m\} r_k p_n + \{r_k, p_n\} p_l r_m) \\ &= (\varepsilon_{lim} \varepsilon_{ljn} + \varepsilon_{kni} \varepsilon_{kjm}) r_m p_n = (\delta_{jn} \delta_{im} - \delta_{in} \delta_{jm}) r_m p_n \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} r_m p_n = \varepsilon_{ijk} L_k. \end{aligned}$$

c) Die Zeitentwicklung einer Größe A in einem System mit Hamiltonfunktion H kann ausgedrückt werden durch $\frac{d}{dt} A = \{A, H\} + \frac{\partial}{\partial t} A$. Für $\frac{d}{dt} A = 0 = \frac{d}{dt} B$ ist also $\{A, H\} = -\frac{\partial}{\partial t} A$, $\{B, H\} = -\frac{\partial}{\partial t} B$ und es folgt mithilfe der Jacobi-Identität

$$\{\{A, B\}, H\} = \{A, \{B, H\}\} + \{B, \{H, A\}\} = -\{A, \frac{\partial B}{\partial t}\} + \{B, \frac{\partial A}{\partial t}\} = -\frac{\partial}{\partial t} \{A, B\}.$$

Damit

$$\frac{d}{dt} \{A, B\} = \{\{A, B\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t} \{A, B\} = 0.$$

d) Da $\{L_x, L_y\} = L_z$, ist auch L_z und damit der gesamte Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ erhalten. Weiterhin gilt $\{L_x, p_z\} = \{y p_z - z p_y, p_z\} = -p_y$ und $\{L_y, p_z\} = \{z p_x - x p_z, p_z\} = p_x$, womit auch $\boldsymbol{p}$ eine Erhaltungsgröße ist.

2. Kanonische Transformationen (13 Punkte)

a) Für welche Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist die Transformation

$$Q = q^\alpha p^\beta, \quad P = -q^\gamma p^\delta$$

in einem System mit einem Freiheitsgrad kanonisch? (1 Punkt)

b) Betrachten Sie die kanonische Transformation in einer Dimension gegeben durch $Q = q - pt/m$, $P = p$ für ein freies Teilchen $H = \frac{p^2}{2m}$. Da es sich hierbei um eine explizit zeitabhängige Transformation handelt, ist $H'(Q, P) \neq H(q(Q, P), p(Q, P))$. Nutzen Sie die Bewegungsgleichungen, um die Hamiltonfunktion H' in den transformierten Koordinaten zu finden. (2 Punkte)

Eine kanonische Transformation $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \to (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}, t)$ lässt sich durch eine sogenannte erzeugende Funktion $F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}, t)$ beschreiben mit

$$\frac{\partial F}{\partial q_j} = p_j, \quad \frac{\partial F}{\partial Q_j} = -P_j, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = H' - H,$$

wobei H' die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten ist. Mehr Einzelheiten und ein Beispiel dazu können Sie im Vorlesungsskript im Abschnitt 6.5 nachlesen.

c) Finden Sie für die beiden kanonischen Transformationen in den Aufgabenteilen a) und b) jeweils die zugehörige erzeugende Funktion. Überprüfen Sie für Aufgabenteil b), dass $\frac{\partial F}{\partial t} = H' - H$ gilt. (4 Punkte)

d) Betrachten Sie ein System in einer Dimension beschrieben durch die Hamiltonfunktion $H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$. Bestimmen Sie die kanonische Transformation, die durch

$$F(q, Q) = Q \arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{2Q}}\right) + \frac{q}{2}\sqrt{2Q - q^2}$$

erzeugt wird und finden Sie die Hamiltonfunktion in den neuen Koordinaten (Q, P). Überprüfen Sie, dass $\{Q, P\}_{q,p} = 1$ gilt. Skizzieren Sie die möglichen Trajektorien sowohl im (q, p)- als auch im (Q, P)-Phasenraum. (6 Punkte)
Hinweis: $\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Lösungsvorschlag

a) Damit eine Transformation kanonisch ist, muss auch für die neuen Koordinaten $\{Q, P\} = 1$ gelten. Wir untersuchen also

$$\{Q, P\} = -\{q^\alpha p^\beta, q^\gamma p^\delta\} = (\beta\gamma - \alpha\delta) q^{\alpha+\gamma-1} p^{\beta+\delta-1} \stackrel{!}{=} 1.$$

Damit die p- und q-Abhängigkeit verschwindet, müssen wir also zum einen $1 = \alpha + \gamma = \beta + \delta$ fordern. Drücken wir den Vorfaktor durch α und δ aus, folgt dann zusätzlich

$$(1 - \delta)(1 - \alpha) - \alpha\delta = 1 - \delta - \alpha \stackrel{!}{=} 1.$$

Folglich ist die Transformation genau dann kanonisch, wenn sie allein durch α parametrisiert werden kann als

$$Q = q^\alpha p^{1+\alpha}, \quad P = -q^{1-\alpha} p^{-\alpha}. \tag{1}$$

b) Es ist

$$\dot{Q} = \dot{q} - \frac{\dot{p}t}{m} - \frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{t}{m} - \frac{p}{m} = \frac{p}{m} + 0 - \frac{p}{m} = 0 = \frac{\partial H'}{\partial Q}$$

sowie

$$\dot{P} = \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 = -\frac{\partial H'}{\partial P}.$$

Es folgt direkt $H'(Q, P) = \text{konst.}$, und da additive Konstanten irrelevant sind für Hamiltonfunktionen, können wir $H'(Q, P) = 0$ setzen.

c) Es soll zum einen gelten $\frac{\partial F}{\partial q} = p$. Für die Transformation aus Aufgabenteil a) heißt das $\frac{\partial F}{\partial q} = Q^{\frac{1}{1+\alpha}} q^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, also $F(q,Q) = (1+\alpha)(qQ)^{\frac{1}{1+\alpha}} + C(Q)$. Rechnet man nun $\frac{\partial F}{\partial Q}$ aus und setzt es gleich $-P = q^{1-\alpha} p^{-\alpha} = q^{\frac{1}{1+\alpha}} Q^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, so sieht man, dass $C(Q) = 0$.

Für den Aufgabenteil b) führen wir die gleichen Betrachtungen durch und finden mit $p = \frac{m(q-Q)}{t}$, $F(q,Q) = \frac{m(q-Q)^2}{2t}$. Es gilt hier dann $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2m}\frac{m^2(q-Q)^2}{t^2} - \frac{m(q-Q)^2}{2t^2} = 0$, wie wir auch schon aus den Bewegungsgleichungen gefolgert hatten.

d) Es ist

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \sqrt{\frac{Q}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - q^2/2Q}} + \frac{1}{2}\sqrt{2Q - q^2} - \frac{q^2}{2}\frac{1}{\sqrt{2Q - q^2}} = \sqrt{2Q - q^2}$$

sowie

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -\arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{2Q}}\right) - \frac{q}{2}\frac{1}{\sqrt{2Q - q^2}} + \frac{1}{2}\frac{q}{\sqrt{2Q}}\frac{1}{\sqrt{1 - q^2/2Q}} = -\arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{2Q}}\right).$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$Q = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right).$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung erhalten wir

$$P = -\arcsin\left(\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}\right) = -\arctan\left(\frac{q}{p}\right).$$

Es folgt also $H'(Q,P) = Q$.

Wir überprüfen, dass es sich tatsächlich um eine kanonische Transformation handelt

$$\begin{aligned}\{Q,P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} &= -q \underbrace{\frac{\partial}{\partial p}\arctan(q/p)}_{=\frac{-q}{p}\frac{\partial}{\partial q}\arctan(q/p)} + p\frac{\partial}{\partial q}\arctan(q/p) \\ &= \frac{q^2+p^2}{p}\frac{\partial}{\partial q}\arctan(q/p) = \frac{q^2+p^2}{p^2}\frac{1}{1+q^2/p^2} = 1.\end{aligned}$$

Schließlich wollen wir noch die Trajektorien im Phasenraum skizzieren. In den „alten“ Koordinaten lauten die Bewegungsgleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q. \tag{2}$$

Ableiten der ersten Gleichung und Einsetzen in die zweite ergibt

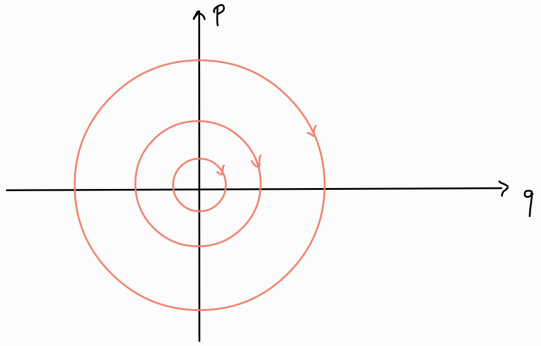
$$\ddot{q} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) = q_0 \cos(t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad p(t) = \dot{q}(t) = -q_0 \sin(t + \varphi_0)$$

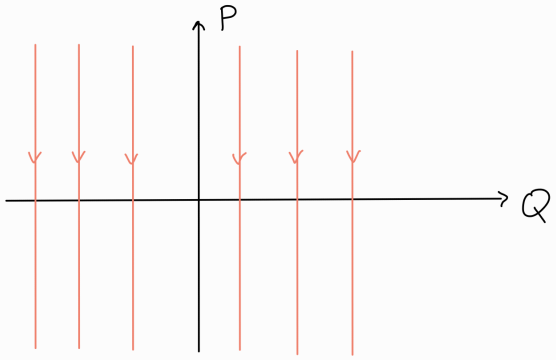
mit zwei von den Anfangsbedingungen abhängigen Konstanten q_0 und φ_0. Im Phasenraum entspricht dies Kreisen um den Ursprung mit Radius q_0.

In den transformierten Koordinaten ist

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = 0, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -1.$$

Dies entspricht Phasenraum-Trajektorien mit konstantem Q und linear abfallendem P.


p
q


P
Q