Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 9
Besprechung 04.07.2023

---

1. Ebenes Doppel-Pendel (10 Punkte)

Betrachten Sie das in Abb. 1 dargestellte ebene Doppel-Pendel. Beide Massenpunkte bewegen sich nur in der $x-z$- Ebene. Die Massen der Massenpunkte sind m_1 und m_2 und die Längen der massenlosen Stäbe sind l_1 und l_2. Die Gravitationskraft wirkt parallel zur z-Achse.

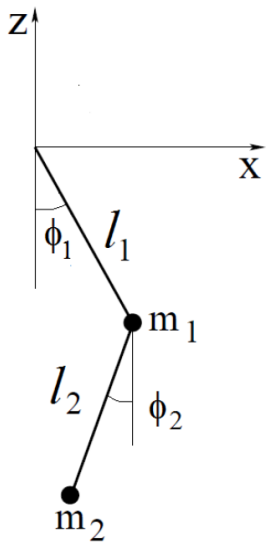

Abbildung 1: Das ebene Doppel-Pendel.

a) Wählen Sie als generalisierte Koordinaten die Winkel ϕ_1 und ϕ_2. Geben Sie die Matrizen m_{ij} und V_{ij} des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens für kleine Schwingungen an. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für ϕ_1 und ϕ_2 her. (3 Punkte)

b) Stellen Sie die Eigenwertgleichung auf und bestimmen Sie die Eigenfrequenzen. Geben Sie die Normalkoordinaten Q_k an. (3 Punkte)

c) Betrachten Sie nun das Pendel mit $l_1 = l_2 = l$. Geben Sie die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren für die Grenzfälle $m_1 \gg m_2$ und $m_1 \ll m_2$ an und beschreiben Sie die Bewegung des Pendels in beiden Fällen. (4 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Es ist

$$x_1 = l_1 \sin\phi_1, \quad z_1 = -l_1 \cos\phi_1,$$
$$x_2 = x_1 + l_2 \sin\phi_2, \quad z_2 = z_1 - l_2 \cos\phi_2.$$

Dann folgt

$$\dot{x}_1 = l_1\dot{\phi}_1\cos\phi_1, \;\; \dot{z}_1 = l_1\dot{\phi}_1\sin\phi_1,$$
$$\dot{x}_2 = l_1\dot{\phi}_1\cos\phi_1 + l_2\dot{\phi}_2\cos\phi_2, \;\; z_2 = l_1\dot{\phi}_1\sin\phi_1 + l_2\dot{\phi}_2\sin\phi_2.$$

Die kinetische Energie lautet

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)l_1\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)\dot{\phi}_1^2\dot{\phi}_2^2\right], \end{aligned}$$

wobei wir $\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 = \cos(\phi_1-\phi_2)$ benutzt haben.
Die potenzielle Energie ist

$$U = g\left(m_1z_1 + m_2z_2\right) = -\left(m_1+m_2\right)gl_1\cos\phi_1 - m_2gl_2\cos\phi_2.$$

und es folgt die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L = T - U = \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)l_1\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[l_2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1l_2\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)\dot{\phi}_1^2\dot{\phi}_2^2\right] \\ + \left(m_1+m_2\right)gl_1\cos\phi_1 + m_2gl_2\cos\phi_2. \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\left[\dot{\phi}_2^2\sin(\phi_1-\phi_2) + \ddot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2)\right] + \frac{g}{l_1}\sin\phi_1 = 0,$$
$$\ddot{\phi}_2 + \frac{l_1}{l_2}\left[-\dot{\phi}_1^2\sin(\phi_1-\phi_2) + \ddot{\phi}_1\cos(\phi_1-\phi_2)\right] + \frac{g}{l_2}\sin\phi_2 = 0.$$

Für kleine Schwingungen $\phi_1 \ll 1$, $\phi_2 \ll 1$ können diese Gleichungen linearisiert werden. Das bedeutet, dass wir die folgenden Näherungen benutzen

$$\sin x \simeq x, \, \cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Die Lagrange-Funktion für kleine Schwingungen ist dann

$$\begin{aligned} L &\simeq \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1\dot{\phi}_1 + l_2\dot{\phi}_2\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\phi_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl_2\phi_2^2 + (m_1+m_2)gl_1 + m_2gl_2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{2}\left(m_{ij}\dot{\phi}_i\dot{\phi}_j - V_{ij}\phi_i\phi_j\right) + (m_1+m_2)gl_1 + m_2gl_2 \end{aligned}$$

mit den Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{V}$

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix}, \;\; \hat{V} = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2gl_2 \end{pmatrix}.$$

Die Bewegungsgleichungen für kleine Schwingungen folgen mithilfe der Matrizen $\hat{m}$, $\hat{V}$ und $\sum_j(m_{ij}\ddot{\phi}_j + V_{ij}\phi_j) = 0$, $i = 1, 2$, oder aus der Linearisierung der oben angegebenen Bewegungsgleichungen zu

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{l_2}{l_1}\ddot{\phi}_2 + \frac{g}{l_1}\phi_1 = 0,$$
$$\ddot{\phi}_2 + \frac{l_1}{l_2}\ddot{\phi}_1 + \frac{g}{l_2}\phi_2 = 0.$$

b) Die Eigenwertgleichung lautet $\det(\hat{V} - \omega^2 \hat{m}) = 0$. Also

$$\left[(m_1+m_2)gl_1 - \omega^2(m_1+m_2)l_1^2\right]\left(m_2 g l_2 - \omega^2 m_2 l_2^2\right) - (\omega^2 m_2 l_1 l_2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 m_2 l_1^2 l_2^2 (\omega^2)^2 - (m_1+m_2)m_2 g l_1 l_2 (l_1+l_2)\omega^2 + (m_1+m_2)m_2 g^2 l_1 l_2 = 0$$

und es ergeben sich die Eigenfrequenzen

$$\omega_1^2 = \frac{2g}{l_1+l_2+\sqrt{(l_1+l_2)^2 - 4l_1 l_2 m_1/(m_1+m_2)}},$$
$$\omega_2^2 = \frac{2g}{l_1+l_2-\sqrt{(l_1+l_2)^2 - 4l_1 l_2 m_1/(m_1+m_2)}}.$$

Die (nicht-normierten) Eigenvektoren folgen aus

$$\sum_{i=1,2}(V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij})A_j^{(k)} = 0$$

zu

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} m_2/(m_1+m_2) \\ -\frac{l_1-l_2-d}{2l_2} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} m_2/(m_1+m_2) \\ -\frac{l_1-l_2+d}{2l_2} \end{pmatrix},$$

wobei

$$d = \sqrt{(l_1+l_2)^2 - 4l_1 l_2 m_1/(m_1+m_2)}$$

definiert wurde. Aus den Vektoren $A_i^{(k)}$ bilden wir die quadratische Matrix $\hat{a}$ mit Koeffizienten c_i:

$$\hat{a} = (a)_{ij} = \left(c_1 A^{(1)}, c_2 A^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} c_1 m_2/(m_1+m_2) & c_2 m_2/(m_1+m_2) \\ -c_1\frac{l_1-l_2-d}{2l_2} & c_2\frac{l_1-l_2+d}{2l_2} \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten c_i werden aus der Normierung $\hat{a}^T\hat{m}\hat{a} = \hat{1}$ bestimmt:

$$c_1 = \left[\frac{2(m_1+m_2)}{m_2}\frac{1}{m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2 + d\,(l_1(m_2-m_1)+l_2(m_1+m_2))}\right]^{1/2},$$
$$c_2 = \left[\frac{2(m_1+m_2)}{m_2}\frac{1}{m_1(l_1-l_2)^2 + m_2(l_1+l_2)^2 - d\,(l_1(m_2-m_1)+l_2(m_1+m_2))}\right]^{1/2}.$$

Für die Normalkoordinaten Q_k gilt

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{pmatrix} = \hat{a}\begin{pmatrix}Q_1 \\ Q_2\end{pmatrix} = \hat{a}\vec{Q} \rightarrow \vec{Q} = \hat{a}^{-1}\vec{\phi}.$$
$$\hat{a}^T\hat{m}\hat{a} = \hat{1} \rightarrow \hat{a}^{-1} = \hat{a}^T\hat{m} \rightarrow \vec{Q} = \hat{a}^T\hat{m}\vec{\phi}$$

und wir erhalten

$$Q_1 = \frac{c_1 m_2}{2}\left[l_1(l_1+l_2+d)\phi_1 + l_2\left(l_1+l_2-\frac{m_1 l_1}{m_1+m_2}+d\right)\phi_2\right],$$
$$Q_2 = \frac{c_2 m_2}{2}\left[l_1(l_1+l_2-d)\phi_1 + l_2\left(l_1+l_2-\frac{m_1 l_1}{m_1+m_2}-d\right)\phi_2\right].$$

c) Für $l_1 = l_2 = l$ ist

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g/l}{1 \pm \sqrt{m_2/(m_1+m_2)}}.$$

Für $m_1 \gg m_2$ gilt

$$\omega_{1,2}^2 \simeq \frac{g}{l}.$$

Betrachten wir zusätzlich die Eigenvektoren $A^{(k)}$) sehen wir, dass das bedeutet, die Masse m_1 beinahe in Ruhe ist, und die Masse m_2 mit der üblichen Pendel-Frequenz $\sqrt{g/l}$ oszilliert.
Für $m_1 \ll m_2$ gilt

$$\omega_1^2 \simeq \frac{g/l}{1+[1-m_1/(2m_2)]} \simeq \frac{g}{2l}$$

und

$$\omega_2^2 \simeq \frac{g/l}{1-\sqrt{1-m_1/m_2}} \simeq \frac{g/l}{1-[1-m_1/(2m_2)]} = \frac{2g}{l}\frac{m_2}{m_1}.$$

Die erste Mode (ω_1) entspricht einem Pendel der Länge $2l$. Für diese Mode gilt $A_2^{(1)} \simeq A_1^{(1)}$, d.h., dass das Doppel-Pendel sich wie ein einzelnes Pendel der Länge $2l$ bewegt. Für die zweite Mode (ω_2) gilt $A_2^{(2)} \simeq -A_1^{(2)}$. Das bedeutet, dass die Masse m_2 ungefähr in Ruhe bleibt und m_1 schwingt.

2. Asymmetrisches dreiatomiges Molekül (10 Punkte)

Betrachten Sie das in Abb. 2 skizzierte Model für ein dreiatomiges lineares Molekül. Die drei Atome der Massen $m_1 = m_2 = m$ und $m_3 = M$ sind über zwei Federn der Federkonstanten k und $2k$ miteinander verbunden und können sich nur entlang der Molekülachse bewegen. Der Gleichgewichtsabstand zwischen benachbarten Atomen sei l. Die Auslenkungen aus den jeweiligen Ruhelagen werden mit x_i ($i = 1, 2, 3$) bezeichnet.

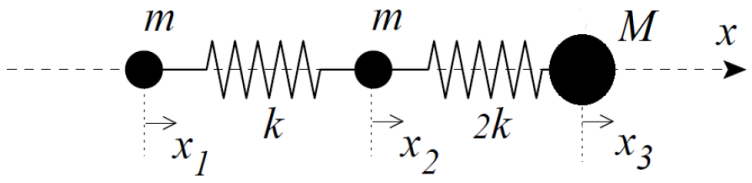

Abbildung 2: Asymmetrisches dreiatomiges Molekül.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion des Moleküles und die zugehörigen Matrizen m_{ij} und V_{ij} an. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und zugehörigen Eigenvektoren. Was ergibt sich im Limes $M \to \infty$? (3 Punkte)
Hinweis: Eine der Lösungen ist $\omega^2 = 0$. Sie entspricht einer gleichförmigen Bewegung des ganzen Moleküls entlang der x-Achse.

c) Betrachten Sie nun den Fall $M = 2m$. Geben Sie die Normalkoordinaten Q_k und die allgemeine reelle Lösung an. (5 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Die Langrange-Funktion des Moleküles lautet:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + \frac{M}{2}\dot{x}_3^2 - \frac{k}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2 - k\left(x_3 - x_2\right)^2 .$$

Dies lässt sich auch schreiben als

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{x}}^T \hat{m} \dot{\vec{x}} - \vec{x}^T \hat{V} \vec{x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left[m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - V_{ij}x_i x_j\right]$$

mit den beiden (symmetrischen) Matrizen

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 3k & -2k \\ 0 & -2k & 2k \end{pmatrix}.$$

b) Eigenwertgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \begin{pmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 3k - \omega^2 m & -2k \\ 0 & -2k & 2k - \omega^2 M \end{pmatrix} \right| \\ &= (k - \omega^2 m)(3k - \omega^2 m)(2k - \omega^2 M) - k^2(2k - \omega^2 M) - 4k^2(k - \omega^2 m) \\ &= -\omega^2\left[M m^2 \omega^4 - 2km(2M + m)\omega^2 + 2k^2(M + 2m)\right]. \end{aligned}$$

Eigenfrequenzen:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 0, \\ \omega_2^2 &= \frac{k}{M}\left(1 + \frac{2M}{m} - \sqrt{1 + \frac{2M^2}{m^2}}\right), \\ \omega_3^2 &= \frac{k}{M}\left(1 + \frac{2M}{m} + \sqrt{1 + \frac{2M^2}{m^2}}\right). \end{aligned}$$

Eigenvektoren (nichtnormierte):

$$\begin{aligned} &\sum_{ij}\left(V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}\right) A_j^{(k)} = 0, \\ &A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \frac{m}{M} + \sqrt{2 + \frac{m^2}{M^2}} \\ \frac{m^2}{M^2} - \frac{m}{M}\sqrt{2 + \frac{m^2}{M^2}} \end{pmatrix}, \\ &A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \frac{m}{M} - \sqrt{2 + \frac{m^2}{M^2}} \\ \frac{m^2}{M^2} + \frac{m}{M}\sqrt{2 + \frac{m^2}{M^2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Limes $M \to \infty$:

$$\omega_2^2 = (2 - \sqrt{2})k/m, \;\; \omega_3^2 = (2 + \sqrt{2})k/m.$$

c) Für $M = 2m$ erhalten wir:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \;\; \omega_3 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

und

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \;\; A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \;\; A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus den Vektoren $A_i^{(k)}$ bilden wir die quadratische Matrix $\hat{a}$ mit Koeffizienten c_i:

$$\hat{a} = \left(c_1 A^{(1)}, c_2 A^{(2)}, c_3 A^{(3)} \right) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & 0 & -3c_3 \\ c_1 & -c_2/2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Aus der Normierung $\hat{a}^T \hat{m} \hat{a} = \hat{1}$ bestimmen wir die Koeffizienten c_i:

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{m}}, \;\; c_2 = \sqrt{\frac{2}{3m}}, \;\; c_3 = \frac{1}{2\sqrt{3m}}.$$

Normalkoordinaten:

$$Q_1 = \frac{\sqrt{m}}{2}(x_1 + x_2 + 2x_3),$$
$$Q_2 = \frac{2m}{3}(x_1 - x_3),$$
$$Q_3 = \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{3}}(x_1 - 3x_2 + 2x_3).$$

Lösung mit $\omega_1^2 = 0$: In Normalkoordinaten lautet die enstprechende Gleichung

$$\ddot{Q}_1 = 0$$

und damit ist die Lösung gegeben durch

$$Q(t) = \beta_1 t + \alpha_1,$$

was einer gleichförmigen Bewegung des gesamten Moleküles entspricht.
Die allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\beta_1 t + \alpha_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \beta_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \beta_3 \cos(\omega_3 t + \alpha_3)$$

mit den sechs reellen Konstanten α_i, β_i; $(i = 1; 2; 3)$. Es sind sechs Konstanten, da wir es mit drei Differentialgleichungen zweiter Ordung zu tun haben.