Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

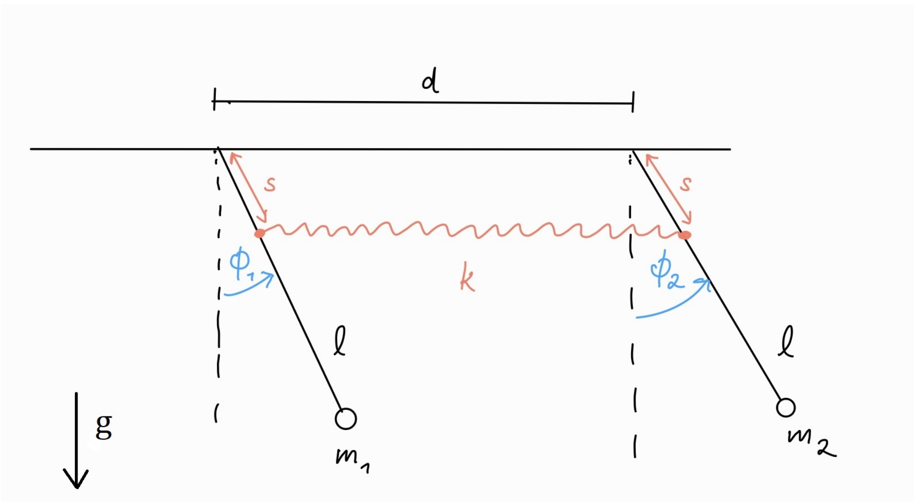
Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Blatt 10
Abgabe 07.07.2023, Besprechung 11.07.2023

---

1. Gekoppelte Pendel (14 Punkte)

Wir betrachten das in der Abbildung dargestelle System aus zwei mathematischen Pendeln der Länge l mit Massen m_1 und m_2, die in einer Entfernung d voneinander aufgehängt sind. Eine massenlose Feder mit Federkonstanten k, die jeweils in einem Abstand s unterhalb des Aufhängepunktes an den Pendeln befestigt ist, koppelt die beiden Pendel. Die Auslenkung der Pendel aus der Ruhelage beschreiben wir mit den beiden Winkeln ϕ_1 und ϕ_2. Die Gleichgewichtslänge der Feder betrage d und es wirke die Schwerkraft g in negative y-Richtung.



a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion des Systems für kleine Auslenkungen und schreiben Sie sie in der Form

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\phi}}^T \hat{m}\dot{\boldsymbol{\phi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^T \hat{V}\boldsymbol{\phi}$$

mit $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2)^T$. Geben Sie die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{V}$ und die zugehörigen Bewegungsgleichungen an. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen $\omega^2_{k=1,2}$ und die Eigenvektoren $\boldsymbol{A}^{(k)}$ des Problems. Beschreiben Sie die Bewegung des Systems für beide Eigenmoden. Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen an. (4 Punkte)

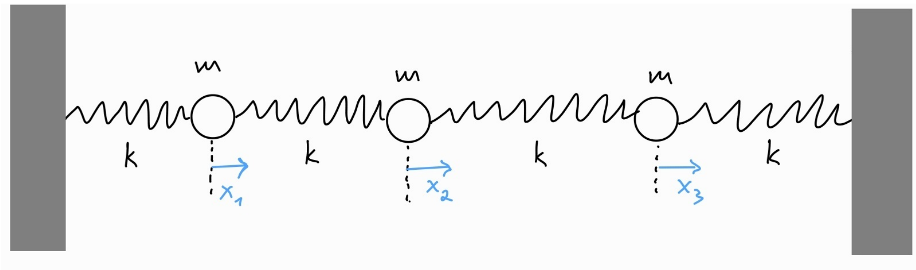
c) Für den Fall $m_1 = m_2$: Beschreiben Sie mithilfe der allgemeinen Lösung, was für eine Bewegung sich ergibt, wenn zu Beginn nur eines der beiden Pendel aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird. (2 Punkte)

d) Auf die Masse m_1 wirke nun eine periodische Kraft $F(t) = f_0 \cos(\Omega t)/l$ mit einer Konstanten f_0 und $\Omega^2 \neq \omega^2_{k=1,2}$. Die neue Lagrangefunktion lautet dann

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\phi}}^T \hat{m}\dot{\boldsymbol{\phi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^T \hat{V}\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{\phi}$$

mit $\boldsymbol{f}(t) = (f_0, 0)^T \cos \Omega t$. Finden Sie auch in diesem Fall die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen. Machen Sie hierzu für die partikuläre Lösung den Ansatz $\boldsymbol{\phi}_\mathrm{p}(t) = \sum_k b_k \boldsymbol{A}^{(k)} \cos(\Omega t)$ und nutzen Sie die Eigenschaften der Vektoren $\boldsymbol{A}^{(k)}$, um die Koeffizienten b_k zu bestimmen. (5 Punkte)

2. Kette mit festen Randbedingungen **(6 Punkte)**



Drei gleiche Massen m sind über vier gleiche Federn mit Federkonstante k zwischen zwei Wänden verbunden und können in x-Richtung schwingen (siehe obige Abbildung). Die Auslenkungen aus den Gleichgewichtslagen werden mit $x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet.

a) Geben Sie die Lagrangefunktion an und bestimmen Sie die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{V}$. (2 Punkte)

b) Finden Sie die Eigenfrequenzen und -vektoren. (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Bewegung der Massen in den unterschiedlichen Eigenmoden. (2 Punkte)