Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

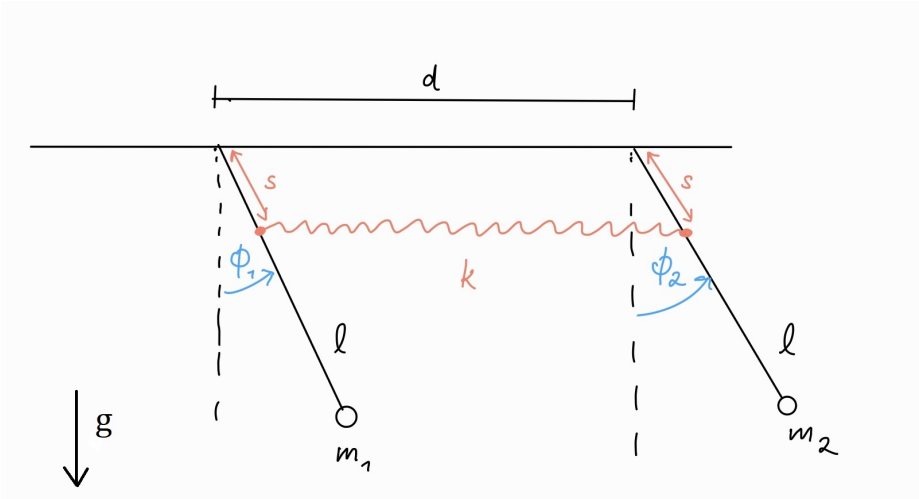
Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 10
Besprechung 11.07.2023

---

1. Gekoppelte Pendel (14 Punkte)

Wir betrachten das in der Abbildung dargestelle System aus zwei mathematischen Pendeln der Länge l mit Massen m_1 und m_2, die in einer Entfernung d voneinander aufgehängt sind. Eine massenlose Feder mit Federkonstanten k, die jeweils in einem Abstand s unterhalb des Aufhängepunktes an den Pendeln befestigt ist, koppelt die beiden Pendel. Die Auslenkung der Pendel aus der Ruhelage beschreiben wir mit den beiden Winkeln ϕ_1 und ϕ_2. Die Gleichgewichtslänge der Feder betrage d und es wirke die Schwerkraft g in negative y-Richtung.



a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion des Systems für kleine Auslenkungen und schreiben Sie sie in der Form

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\phi}}^T \hat{m}\dot{\boldsymbol{\phi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^T \hat{V}\boldsymbol{\phi}$$

mit $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2)^T$. Geben Sie die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{V}$ und die zugehörigen Bewegungsgleichungen an. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen $\omega^2_{k=1,2}$ und die Eigenvektoren $\boldsymbol{A}^{(k)}$ des Problems. Beschreiben Sie die Bewegung des Systems für beide Eigenmoden. Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen an. (4 Punkte)

c) Für den Fall $m_1 = m_2$: Beschreiben Sie mithilfe der allgemeinen Lösung, was für eine Bewegung sich ergibt, wenn zu Beginn nur eines der beiden Pendel aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt wird. (2 Punkte)

d) Auf die Masse m_1 wirke nun eine periodische Kraft $F(t) = f_0 \cos(\Omega t)/l$ mit einer Konstanten f_0 und $\Omega^2 \neq \omega^2_{k=1,2}$. Die neue Lagrangefunktion lautet dann

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\phi}}^T \hat{m}\dot{\boldsymbol{\phi}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^T \hat{V}\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{\phi}$$

mit $\boldsymbol{f}(t) = (f_0, 0)^T \cos \Omega t$. Finden Sie auch in diesem Fall die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen. Machen Sie hierzu für die partikuläre Lösung den Ansatz $\boldsymbol{\phi}_\mathrm{p}(t) = \sum_k b_k \boldsymbol{A}^{(k)} \cos(\Omega t)$ und nutzen Sie die Eigenschaften der Vektoren $\boldsymbol{A}^{(k)}$, um die Koeffizienten b_k zu bestimmen. (5 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\phi}_2^2. \tag{1}$$

Die potentielle Energie setzt sich zusammen aus dem Beitrag aus der Gravitation

$$U_g = -gl(m_1 \cos\phi_1 + m_2 \cos\phi_2) \simeq \text{konst.} + \frac{gl}{2}\left(m_1\phi_1^2 + m_2\phi_2^2\right) \tag{2}$$

und der Feder

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{ks^2}{2}\left((\sin\phi_1 - \sin\phi_2)^2 + (\cos\phi_1 - \cos\phi_2)^2\right) = 2ks^2 \sin^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \\ &\simeq \frac{1}{2} ks^2 (\phi_1 - \phi_2)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Insgesamt also

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\phi}_2^2 - \frac{gl}{2}\left(m_1\phi_1^2 + m_2\phi_2^2\right) - \frac{1}{2} ks^2 (\phi_1 - \phi_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2) \begin{pmatrix} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\phi_1, \phi_2) \begin{pmatrix} m_1 gl + ks^2 & -ks^2 \\ -ks^2 & m_2 gl + ks^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

und die gesuchten Matrizen lauten

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} m_1 gl + ks^2 & -ks^2 \\ -ks^2 & m_2 gl + ks^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Die Bewegungsgleichungen folgen aus $\hat{m}\ddot{\boldsymbol{\phi}} + \hat{V}\boldsymbol{\phi} = 0$ und lauten

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{ks^2}{m_1 l^2}\right)\phi_1 &= \frac{ks^2}{m_1 l^2}\phi_2, \\ \ddot{\phi}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{ks^2}{m_2 l^2}\right)\phi_2 &= \frac{ks^2}{m_2 l^2}\phi_1. \end{aligned}$$

b) Die Eigenwertgleichung lautet $\det(\hat{V} - \omega^2 \hat{m}) = 0$. Daraus ergeben sich die Eigenfrequenzen

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}\frac{s^2}{l^2} \tag{6}$$

und die zugehörigen Eigenvektoren lauten

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{(m_1 + m_2)l}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{(m_1 + m_2)l}} \begin{pmatrix} \sqrt{m_2/m_1} \\ -\sqrt{m_1/m_2} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

wobei wir so normiert haben, dass $\boldsymbol{A}^{(p)T} \hat{m} \boldsymbol{A}^{(k)} = \delta_{pk}$.
Die erste der beiden Eigenmoden entspricht damit einer gleichphasigen Schwingung beider Pendel mit gleicher Amplitude, sodass die Feder zu jedem Zeitpunkt

entspannt ist und entsprechend die Eigenfrequenz einfach der üblichen Pendelfrequenz entspricht. Die zweite Schwingungsmode ist eine gegenphasige Schwingung, wobei das Amplitudenverhältnis der beiden Pendel durch das Massenverhältnis bestimmt wird. Hier wird die Feder während der Bewegung periodisch auseinandergezogen und zusammengedrückt und entsprechend ist die Eigenfrequenz höher als die der einfachen Pendelschwingung.

Die allgemeine Lösung ergibt sich aus einer Linearkombination der beiden Eigenmoden zu

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \sum_{k=1,2} c_k \boldsymbol{A}^{(k)} \cos(\omega_k t - \varphi_k), \tag{8}$$

wobei $c_{k=1,2}$ und $\varphi_{k=1,2}$ aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Konstanten sind.

c) Sei die erste Masse zu Beginn um einen Winkel $\phi_1(0) = \phi_0$ ausgelenkt, die zweite Masse bei $\phi_2(0) = 0$ und $\dot{\boldsymbol{\phi}} = (0,0)^T$. Für $m_1 = m_2 = m$ soll also gelten

$$\begin{pmatrix}\phi_1(0)\\ \phi_2(0)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} c_1\cos(\varphi_1) + c_2\cos(\varphi_2)\\ c_1\cos(\varphi_1) - c_2\cos(\varphi_2)\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}\phi_0\\ 0\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\phi}_1(0)\\ \dot{\phi}_2(0)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} \omega_1 c_1\sin(\varphi_1) + \omega_2 c_2\sin(\varphi_2)\\ \omega_1 c_1\sin(\varphi_1) - \omega_2 c_2\sin(\varphi_2)\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{10}$$

Entsprechend wählen wir $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ und $c_1 = c_2 = \sqrt{2ml}\phi_0/2$. Es ergibt sich

$$\phi_1(t) = \frac{\phi_0}{2}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) = \phi_0 \cos\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right) \tag{11}$$

$$\phi_2(t) = \frac{\phi_0}{2}(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) = \phi_0 \sin\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right). \tag{12}$$

Wie in Abb. 1 gezeigt, entspricht dies einem Bewegungsmuster, bei dem die Schwingungsenergie periodisch zwischen den beiden Pendeln „ausgetauscht“ wird. Dabei ist die Frequenz dieses Energieaustausches gegeben durch $(\omega_2 - \omega_1)/2$ („Einhüllende“), während die Schwingungsfrequenz etwa $(\omega_1 + \omega_2)/2$ beträgt. Dieses Phänomen wird Schwebung genannt.

d) Die neue Bewegungsgleichung lautet

$$\hat{m}\ddot{\boldsymbol{\phi}} + \hat{V}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{f}(t), \tag{13}$$

sie ist also inhomogen und die allgemeine Lösung ergibt sich als Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (also Gl. (8)) und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $\boldsymbol{\phi}_\mathrm{p}(t) = \sum_k b_k \boldsymbol{A}^{(k)} \cos(\Omega t)$ was, eingesetzt in die Bewegungsgleichung, auf $(\boldsymbol{f_0} = (f_0, 0)^T)$

$$\sum_k b_k \left(\hat{m}\Omega^2 - \hat{V}\right)\boldsymbol{A}^{(k)} = \boldsymbol{f_0}. \tag{14}$$

Wir nutzen nun aus, dass $\hat{V}\boldsymbol{A}^{(k)} = \omega_k^2 \hat{m}\boldsymbol{A}^{(k)}$ gilt und es folgt

$$\sum_k b_k(\Omega^2 - \omega_k^2)\hat{m}\boldsymbol{A}^{(k)} = \boldsymbol{f_0}. \tag{15}$$

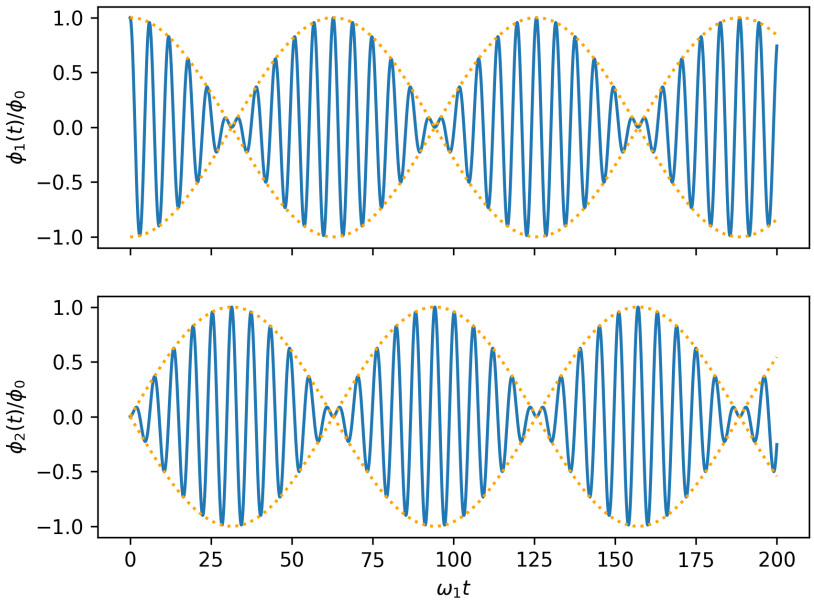


Abbildung 1: Schwebung mit $(\omega_2 - \omega_1)/(\omega_2 + \omega_1) \approx 0.1$. Die gepunktete Linie deutet die Einhüllende an.

Schließlich multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $\boldsymbol{A}^{(p)T}$ und erhalten

$$\sum_k b_k(\Omega^2 - \omega_k^2) \underbrace{\boldsymbol{A}^{(p)T}\hat{m}\boldsymbol{A}^{(k)}}_{=\delta_{pk}} = \boldsymbol{A}^{(p)T}\boldsymbol{f_0} \tag{16}$$

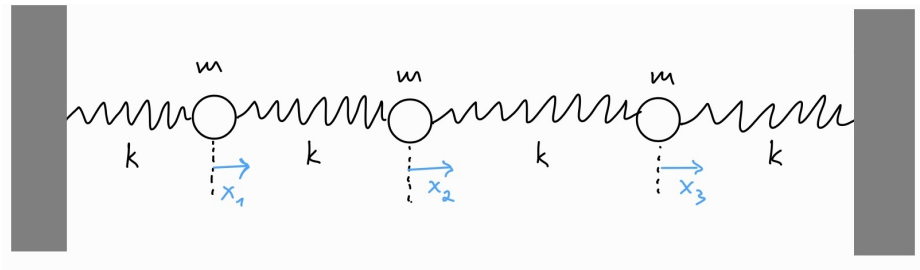
$$\Leftrightarrow \quad b_p = \frac{\boldsymbol{A}^{(p)} \cdot \boldsymbol{f_0}}{\Omega^2 - \omega_p^2}. \tag{17}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung für diesen Fall der angetriebenen Schwingung

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \sum_{k=1,2} c_k \boldsymbol{A}^{(k)} \cos(\omega_k t - \varphi_k) \tag{18}$$
$$+ \frac{f_0}{(m_1 + m_2)l^2} \left[\frac{1}{\Omega^2 - \omega_1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\Omega^2 - \omega_2^2} \begin{pmatrix} m_2/m_1 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

Es wird direkt ersichtlich, dass die Resonanzfrequenzen des Systems (also die Antriebsfrequenzen, bei denen die Schwingungsamplituden divergieren, wenn das System ungedämpft ist), gerade die Eigenfrequenzen sind.

2. Kette mit festen Randbedingungen (6 Punkte)



Drei gleiche Massen m sind über vier gleiche Federn mit Federkonstante k zwischen zwei Wänden verbunden und können in x-Richtung schwingen (siehe obige Abbildung). Die Auslenkungen aus den Gleichgewichtslagen werden mit $x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet.

a) Geben Sie die Lagrangefunktion an und bestimmen Sie die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{V}$. (2 Punkte)

b) Finden Sie die Eigenfrequenzen und -vektoren. (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Bewegung der Massen in den unterschiedlichen Eigenmoden. (2 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Die kinetische Energie ist $T = \frac{m}{2}\sum_i \dot{x}_i^2$, während die potentiellen Energien der Federn gegeben sind durch

$$U = \frac{k}{2}(x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2) = k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3). \tag{19}$$

Damit ergibt sich die Lagrangefunktion ($\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$)

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T \underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}}_{=\hat{m}} \dot{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix}}_{=\hat{V}} \boldsymbol{x}. \tag{20}$$

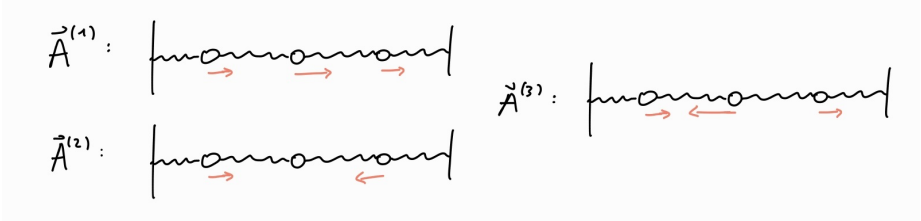
b) Die Eigenwertgleichung ist

$$\begin{aligned} \det(\hat{V} - \omega^2\hat{m}) &= \det \begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{pmatrix} \\ &= (2k - m\omega^2)\left[(2k - m\omega^2)^2 - 2k^2\right] = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

und die Lösungen lauten damit

$$\omega_1^2 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\frac{k}{m}}, \quad \omega_2^2 = \sqrt{2\frac{k}{m}}, \quad \omega_3^2 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}}. \tag{22}$$

Die dazugehörigen Eigenvektoren lauten

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{(3)} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

c) Die Skizzen sind in der Abbildung unten zu finden. Die erste Eigenmode ist dabei eine gleichphasige Schwingung aller drei Massen, wobei die Amplitude der mittleren Masse etwas größer ist als die der beiden äußeren. Bei der zweiten Eigenmode ist die mittlere Masse in Ruhe, während die äußeren beiden gegenphasig schwingen. Die dritte Eigenmode weist die gleichen Amplituden auf wie die erste, mit dem Unterschied, dass hier die mittlere Masse gegenphasig den beiden äußeren schwingt.