Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung zu Blatt 11
Besprechung 18.07.2023

---

1. Quadratische Anordnung von Punktmassen **(6 Punkte)**

Betrachten Sie die in Abb.**??** abgebildete Anordnung von Punktmassen $m \neq M$ in der $x-y$-Ebene. Die masselosen starren Verbindungsstangen haben die Länge a.

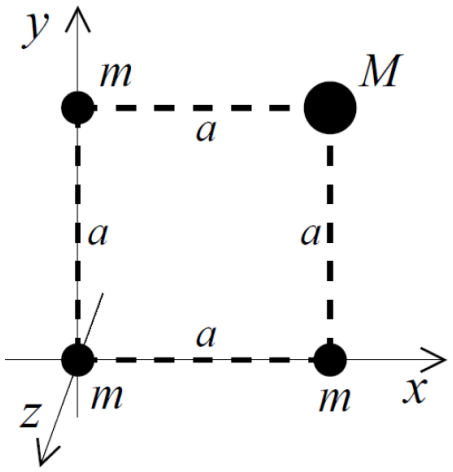

Abbildung 1: Quadratische Anordnung von Punktmassen.

a) Berechnen Sie die Komponenten I'_{ik} des Trägheitstensors bezüglich des Ursprungs ($x = y = z = 0$). (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie den Trägsheitstensor $\hat{I}$ bezüglich des Schwerpunktes mithilfe des Steinerschen Satzes (2 Punkte)

$$I'_{kp} = I_{kp} + \mu(\boldsymbol{a}^2\delta_{kp} - a_k a_p), \quad \mu \equiv \sum_i m_i.$$

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\hat{I}$. Finden Sie die normierten Eigenvektoren (Hauptachsen) der Matrix $\hat{I}$. (2 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Die Komponenten des Trägheitstensors $\hat{I}'$ sind

$$I'_{kp} = \sum_i \left((\vec{r}'_i)^2\delta_{kp} - r'_{ik}r'_{ip}.\right)$$

Bezüglich des Ursprungs, hat man

$$I'_{11} = \sum_i m_i((\vec{r}'_i)^2 - (x'_i)^2) = \sum_i m_i (y'_i)^2 = (m+M)\, a^2;$$
$$I'_{22} = \sum_i m_i (x'_i)^2 = (m+M)a^2;$$
$$I'_{33} = I'_{11} + I'_{22} = 2(m+M)a^2;$$
$$I'_{12} = I'_{21} = -\sum_i m_i x'_i y'_i = -Ma^2;$$
$$I'_{13} = I'_{31} = 0;$$
$$I'_{23} = I'_{32} = 0.$$

Der ganzer Trägheitstensor lautet folglich

$$\hat{I}' = \begin{pmatrix} (m+M)a^2 & -Ma^2 & 0 \\ -Ma^2 & (m+M)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(m+M)a^2 \end{pmatrix}.$$

b) Die Koordinaten des Schwerpunktes sind durch

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

gegeben. Es ist

$$R_x = \frac{(m+M)a}{3m+M};$$
$$R_y = \frac{(m+M)a}{3m+M};$$
$$|\vec{R}|^2 = R_x^2 + R_y^2 = 2\frac{(m+M)^2}{\mu^2}a^2, \;\; \mu = (3m+M).$$

Der Steiner-Satz, rückwärts im Hauptachsensystem angewendet, mit

$$a_x = R_x,$$
$$a_y = R_y,$$
$$a_z = 0,$$

führt dann auf

$$I_{11} = I'_{11} - \mu\left(|\vec{R}|^2 - R_x^2\right) = I'_{11} - \mu R_y^2,$$
$$I_{22} = I'_{22} - \mu R_x^2,$$
$$I_{33} = I'_{33} - \mu|\vec{R}|^2,$$
$$I_{12} = I_{21} = I'_{12} + \mu R_x R_y,$$
$$I_{13} = I_{31} = I_{23} = I_{32} = 0.$$

Also

$$I = \begin{pmatrix} (m+M)a^2 - \mu R_y^2 & -Ma^2 + \mu R_x R_y & 0 \\ -Ma^2 + \mu R_x R_y & (m+M)a^2 - \mu R_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(m+M)a^2 - \mu|\vec{R}|^2 \end{pmatrix}.$$

c) Die Eigenwerte der Matrix $\hat{I}$ sind

$$I_1 = ma^2,$$
$$I_2 = (m+2M)a^2 - \mu|\vec{R}|^2;$$
$$I_3 = 2(m+M)a^2 - \mu|\vec{R}|^2.$$

Die normierten Hauptachsen sind

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2. Rollender Kreiskegel **(14 Punkte)**

Ein Kreiskegel (homogen verteilte Masse m, Höhe a, Radius R der Grundfläche) liegt in einer Ebene und rollt gleichförmig um seine Kegelspitze. Ein Umlauf benötigt die Zeit T ($\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$).

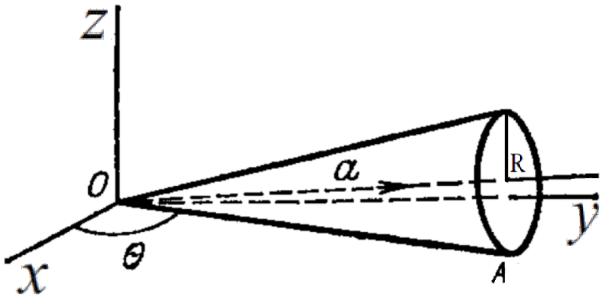

Abbildung 2: Der Kreiskegel.

a) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\hat{I}'$ des Kreiskegels bezüglich des Ursprungs (Punkt O, Abb.**??**). (2 Punkte)

b) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\hat{I}$ bezüglich des Schwerpunktes mithilfe des Steinerschen Satzes. (2 Punkte)

c) Begründen Sie, warum die kinetische Energie T_{kin} des Kegels statt durch die Formel aus der Vorlesung $T_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T\hat{I}\boldsymbol{\Omega}$ in unserem Fall auch mittels $T_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^T\hat{I}'\boldsymbol{\Omega}$ berechnet werden kann, wobei $\boldsymbol{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit ist. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ und die kinetische Energie T_{kin} dieser Rotation. (8 Punkte)
Hinweis: Die instantane Winkelgeschwindigkeit ist parallel zu $\overline{OA}$.

Lösungsvorschlag

a) Wir führen zunächst ein Koordinatensystem (x', y', z') ein mit der z'-Achse auf der Symmetrieachse des Kegels liegend und dem Ursprung in der Kegelspitze. Weiterhin benutzen wir Zylinderkoordinaten (r', φ', z') in diesem Koordinatensystem. Das Kegelvolumen ergibt sich zu

$$V = \int_0^a dz' \int_0^{\frac{z'R}{a}} r'dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' = \frac{\pi}{3}R^2a.$$

Die einheitliche Dichte des Kegels ist $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{\pi R^2 a}$. Die Komponenten des Trägheitstensors bezüglich des Ursprungs lauten

$$I'_{zz} = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a dz' \int_0^{\frac{z'R}{a}} r'\, dr'\, (r')^2 = 2\pi \frac{3m}{\pi R^2 a} \frac{R^4 a}{20 a^4} = \frac{3}{10} m R^2;$$

$$I'_{xx} = I'_{yy} = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a dz' \int_0^{\frac{z'R}{a}} r'\, dr'\, \left((z')^2 + (r')^2 \sin^2\varphi'\right) = \frac{3m}{20}\left(4a^2 + R^2\right).$$

Die Nichtdiagonalelemente des Trägheitstensors verschwinden aufgrund der Symmetrie des betrachteten Problems ($\int_0^{2\pi} d\varphi' \sin\varphi' = 0$, $\int_0^{2\pi} d\varphi' \sin 2\varphi' = 0$).

b) Der Schwerpunkt liegt in der Symmetrie-Achse des Kreiskegels, in der Distanz z_p vom Ursprung, die sich aus

$$z_p = \frac{1}{m} \int d\boldsymbol{r}'\, \rho\, z' = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a dz' \int_0^{\frac{z'R}{a}} dr'\, r' z' = \frac{3}{4} a.$$

Mit dem Steiner-Satz erhält man

$$I_{zz} = I'_{zz} = \frac{3}{10} m R^2,$$

$$I_{xx} = I_{yy} = I'_{xx} - m\left(\frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{3m}{20}\left(R^2 + \frac{a^2}{4}\right).$$

c) Die kinetische Energie T_{kin} des Kegels lautet $\sum_i \frac{m_i \vec{v}_i'^2}{2}$ mit $\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{b}_i$ (wir benutzen die Bezeichnungen aus dem Skript). Bezüglich des Ursprungs, ist (mit $\vec{b} = \vec{b}' + \vec{a}$)

$$\vec{v}_i = \vec{V} + [\vec{\Omega} \times \vec{a}] + [\vec{\Omega} \times \vec{b}'_i],$$
$$\vec{V}' = \vec{V} + [\vec{\Omega} \times \vec{a}] = 0.$$

$\vec{V}\,' = 0$, da der Ursprung in Ruhe ist. Dann

$$\vec{v}_i = [\vec{\Omega} \times \vec{b}'_i].$$

$$T_{\text{kin}} = \sum_i \frac{m_i}{2} [\vec{\Omega} \times \vec{b}'_i]^2 = \frac{1}{2} \sum_{k,p} \Omega_k \Omega_p I'_{kp}.$$

d) Die momentane Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist parallel zur Achse $\overline{OA}$. Der Winkel zwischen $\overline{OA}$ und der Symmetrie-Achse des Kegels ist α mit $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes bezüglich des Ursprungs ist $V = z_p \cos(\alpha)\dot{\theta}$. Die Distanz d zwischen $\overline{OA}$ und dem Schwerpunkt des Kegel ist $d = z_p \sin\alpha$. Die Winkelgeschwindigkeit bezüglich der momentanen Achse $\overline{OA}$ ist also

$$\Omega = \frac{V}{d} = \frac{V}{z_p \sin\alpha} = \dot{\theta}\cot\alpha.$$

Alternativ kann die Winkelgeschwindigkeit auch als Summe aus den Winkelgeschwindigkeiten der Rotationen um die Symmetrieachse des Kegels $\boldsymbol{\Omega}_1 \propto \boldsymbol{e}_{z'}$ und um den Ursprung $\boldsymbol{\Omega}_2 \propto \boldsymbol{e}_z$ berechnet werden, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2$.

Die Projektionen des $\boldsymbol{\Omega}$-Vektors auf die Haupachsen des Kreiskegels sind $\Omega\sin\alpha$ und $\Omega\cos\alpha$. Dann

$$T_{\text{kin}} = \frac{m z_p^2}{2}\cos^2\alpha\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{xx}\cos^2\alpha\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{zz}\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}\dot{\theta}^2 = \frac{3mR^2}{40}\dot{\theta}^2\left(1 + 5\frac{a^2}{a^2+R^2}\right).$$